



UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN
INGEGNERIA DEI VEICOLI TERRESTRI

Tesi di laurea

*Sviluppo di un modello di simulazione
dinamica per vettura Formula SAE*

RELATORI

CANDIDATO

Prof. Ing. Massimo Guiggiani
Dipartimento di Ingegneria Meccanica
Nucleare e della Produzione

Emanuele Pellegrini

Ing. Antonio Sponziello
Dipartimento di Ingegneria Meccanica
Nucleare e della Produzione

Ing. Francesco Frendo
Dipartimento di Ingegneria Meccanica
Nucleare e della Produzione

Anno Accademico 2007-2008

Sommario

Lo scopo del presente lavoro è quello di mettere a disposizione dell'Università di Pisa un modello parametrico di simulazione dinamica per monoposto Formula SAE.

La disponibilità di uno strumento di simulazione per la dinamica del veicolo è infatti di fondamentale importanza per l'estrapolazione delle sue più importanti proprietà dinamiche, oltre che per supportare sia la fase progettuale che quella sperimentale.

Questo infatti consente di ottimizzare il lavoro di sviluppo della monoposto, riducendone i tempi di progetto e fornendo, in una fase successiva, utili indicazioni sulla ricerca dell'ottimo in pista.

Il punto di partenza del lavoro è la suddivisione del veicolo in cinque corpi rigidi, che sono cassa e ruote. In un caso le ruote sono considerate prive di inerzia, mentre nell'altro sono dotate di tensore completo, originando quindi due differenti modelli.

I braccetti delle sospensioni invece sono in ogni caso privi di massa.

L'applicazione al veicolo dei concetti fondamentali della Meccanica classica

e la scrittura di tutte le equazioni alla base del moto,

hanno fatto il resto, consentendo di ottenere i modelli voluti.

Abstract

The aim of this work is to provide the University of Pisa with a parameter-endowed model of dynamic simulation for a Formula SAE one-seat car.

The availability of such a simulating instrument for the dynamics of the vehicle is in fact crucial to the picking up of its main dynamic qualities, in addition to its being extremely important to support both the project and the experimental stage.

This instrument allows to maximize work on the development of the one-seat car, by reducing the project phase and providing – over the next phase – useful instructions to get the most out of the racing car.

The starting point of this work is the subdivision of the vehicle into five stiff parts, which are the four wheels and the chassis.

In one case, wheels are considered as inertia-free, while in the other case they are endowed with a full matrix, therefore giving rise to two different models.

Suspension links are in either case mass-free.

The application of the basic tenets of classical Mechanics to the vehicle and the writing of all the basic equations of motion have allowed for the accomplishment of the required models.

Indice

1 Introduzione.....	1
2 Il modello di veicolo senza inerzia delle ruote – Formulazione delle equazioni.....	4
2.1 Cinematica della cassa.....	5
2.2 Dinamica della cassa - Scrittura delle Equazioni Cardinali.....	11
2.2.1 Scrittura dei termini inerziali.....	12
2.2.2 Scrittura dei termini forzanti.....	17
2.3 Struttura Matriciale e Linearizzazione delle Equazioni.....	20
2.3.1 Calcolo degli angoli di deriva.....	49
2.3.2 Calcolo degli angoli di convergenza e camber relativi.....	50
2.3.3 Il modello di pneumatico.....	66
3 Il modello di veicolo con inerzia delle ruote – Formulazione delle Equazioni.....	67
3.1 Cinematica della cassa.....	68
3.2 Dinamica della cassa – Scrittura delle Equazioni Cardinali.....	68
3.3 Cinematica delle ruote.....	68
3.3.1 Scrittura della velocità di traslazione del centro ruota.....	68
3.3.2 Scrittura della velocità angolare delle ruote.....	70
3.4 Dinamica delle ruote – Scrittura delle Equazioni Cardinali.....	72
3.4.1 Scrittura dei termini inerziali.....	72
3.4.1.1 Momento Angolare delle ruote.....	72
3.4.1.2 Accelerazione del centro ruota.....	75
3.4.1.3 Derivata del momento angolare delle ruote.....	76
3.4.2 Scrittura dei termini forzanti.....	77
3.4.3 Il modello di pneumatico.....	78
3.5 Struttura Matriciale e Linearizzazione delle Equazioni.....	87
4 Simulazioni.....	91
4.1 Fase di accelerazione longitudinale.....	93
4.2 Manovra di Sine Sweep.....	103
4.3 Colpo di sterzo.....	111
5 Conclusioni.....	126
Appendice – Descrizione dei modelli Simulink.....	128
0.1 Il modello Simulink di vettura FSAE senza inerzia delle ruote.....	128
0.2 Il modello Simulink di vettura FSAE con inerzia delle ruote.....	154
Bibliografia.....	166

1 Introduzione

1.1 La Formula SAE

La Formula SAE è una tipologia di competizione veicolistica che coinvolge le Università di tutto il mondo in un campionato annuale articolato in numerose gare disputate in molti paesi intercontinentali.

Lo scopo primo della competizione è quello di mettere alla prova studenti, principalmente appartenenti alle facoltà di Ingegneria dei vari Atenei, al fine di realizzare un prototipo di veicolo da competizione da far gareggiare nelle varie tappe annuali del campionato.

Lo scopo ultimo è quello di stilare una classifica che metta in ordine i risultati ottenuti dai vari Team partecipanti alle edizioni.

Lo sviluppo della monoposto da competizione richiede numerose risorse che principalmente sono di tipo ingegneristico, ma anche umanistico e gestionale, ed un attento lavoro di progettazione e fabbricazione o acquisto dei vari componenti della vettura.

La Formula SAE è una sorta di Formula 1 degli studenti che in questo modo hanno la possibilità, non sono di applicare le varie conoscenze acquisite durante la formazione universitaria, ma anche di crescere a livello professionale durante la risoluzione delle varie problematiche connesse allo sviluppo della vettura e all'ottimizzazione del funzionamento dei vari componenti e sottosistemi della stessa, oltre che alla scelta di soluzioni tecniche più o meno valide.

Ogni squadra che partecipa alle competizioni dispone di un numero più o meno variabile di studenti ognuno dei quali si occupa di un ben preciso aspetto legato all'attività che può riguardare direttamente la monoposto, ma anche esulare dal vero e proprio veicolo per ricadere in aspetti meno diretti quali la gestione del budget, la ricerca degli sponsor e il reclutamento di nuovi studenti per successivi sviluppi del veicolo o di alcuni sottosistemi.

La realizzazione della monoposto pertanto è il risultato ultimo di numerose tesi di laurea riguardanti i più svariati aspetti del veicolo, unico modo infatti per sostenere un'attività articolata e complessa come appunto lo sviluppo della vettura da competizione.

Le successive immagini rappresentano la monoposto sviluppata dal Team dell'Università di Pisa.



Fig 1.1 – Monoposto ET1 dell'università di Pisa – vista frontale



Fig 1.2 – Monoposto ET1 dell'università di Pisa – vista dal retro

1.2 Dinamica di una monoposto Formula SAE

Uno degli aspetti direttamente legati allo sviluppo della monoposto è indubbiamente lo studio della dinamica del veicolo.

Come in tutte le competizioni sportive, anche una vettura Formula SAE necessita dello studio del comportamento dinamico su strada.

Nelle varie tipologie di prove connesse alla gara, l'aspetto della risposta dinamica della vettura è molto importante, tanto quanto l'aspetto della prontezza e guidabilità del motore, perché tutto incide pesantemente sia sulla "facilità di guida" della vettura che sulle oggettive potenzialità della monoposto, nonché alla fine, sul tempo necessario per effettuare le varie tipologie di prove.

1.3 Obiettivi della tesi

Gli obiettivi della presente tesi sono di vario tipo.

- sviluppare un modello di simulazione dinamica della monoposto da competizione in ambiente MATLAB Simulink parametrico nei principali aspetti della progettazione, che consenta di effettuare simulazioni di manovre standard tipiche delle varie tipologie di prove che la vettura è chiamata a superare. Inoltre è richiesto al modello di poter fornire in breve tempo indicazioni necessarie per la scelta o l'ottimizzazione di grandezze fisiche direttamente legate alla geometria e alla struttura di componenti del veicolo che ne influenzano in modo diretto il comportamento su strada;
- mettere a disposizione uno strumento di simulazione, completo dal punto di vista della dinamica del veicolo, da poter essere sempre utilizzato in qualunque stadio della progettazione della vettura e/o perfezionamento della stessa;
- mettere a disposizione uno strumento di simulazione in parallelo ad altri, sviluppati in ambienti differenti per la comparazione;
- disporre di uno strumento di simulazione dinamica del veicolo che possa essere usato come supporto in fase sperimentale;

2 Il modello di veicolo senza inerzia delle ruote – Formulazione delle Equazioni

La struttura delle equazioni caratteristiche del modello realizzato dipende dal tipo di sistema di riferimento attraverso il quale viene descritta l'intera dinamica del veicolo in esame e dal tipo di approccio scelto per la stesura delle stesse. Ovviamente la dinamica è indipendente dai sistemi di riferimento utilizzati.

Nella presente trattazione, l'approccio scelto è di tipo Newtoniano, dunque la stesura delle equazioni che governano il moto del sistema passa dall'imposizione delle Equazioni Cardinali della Dinamica.

Lo sviluppo è stato fatto considerando separatamente la cassa del veicolo e le ruote.

Questa scelta, non indispensabile nel caso in cui venga trascurata l'inerzia delle ruote, risulta invece inevitabile nel caso in cui il modello debba considerare la presenza delle ruote.

Nell'ipotesi di trascurare l'inerzia delle ruote, l'equilibrio del sistema interesserebbe solo ed esclusivamente la cassa del veicolo. Le ruote potrebbero dunque essere considerate parte integrante della cassa stessa e quindi l'equilibrio di questa potrebbe essere scritto considerando le forze agenti sul veicolo direttamente applicate nei punti di contatto a terra.

In realtà, il percorso seguito prevede comunque lo studio separato degli equilibri anche nel caso di ruote prive di inerzia.

La motivazione non è ovviamente la ricerca di una strada più complessa del necessario, ma risiede nella più semplice modifica agli algoritmi di calcolo in un secondo momento, quando verranno infatti prese in considerazione le inerzie delle ruote.

2.1 Cinematica della cassa

Per lo studio del moto della cassa si è fatto uso di un sistema di riferimento assoluto e di due sistemi di riferimento mobili, di cui uno solidale alla cassa come usualmente accade nella dinamica del veicolo e uno ausiliario definito in base alle proiezioni del baricentro della cassa e di uno dei suoi assi di riferimento. In particolare, la terna di versori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} definisce il sistema di riferimento ausiliario mobile, la cui origine è la proiezione N del baricentro della cassa G sul piano stradale, mentre la terna \mathbf{i}_c , \mathbf{j}_c , \mathbf{k}_c definisce il sistema di riferimento solidale alla cassa.

Analogamente, quella \mathbf{i}_0 , \mathbf{j}_0 , \mathbf{k}_0 definisce il sistema di riferimento assoluto di origine \mathbf{O} .

Il moto del riferimento ausiliario è di tipo piano, perché l'origine della terna si muove sul piano stradale, mentre gli assi \mathbf{i} e \mathbf{j} devono mantenere come giacitura tale piano per definizione, con conseguente costante ortogonalità dell'asse \mathbf{k} rispetto al piano stradale.

Il riferimento assoluto, solidale al suolo, è orientato in modo “arbitrario” con l'unico vincolo di ortogonalità del suo asse \mathbf{k}_0 al piano stradale. Il suo compito infatti è semplicemente quello di definire un punto di partenza rispetto al quale riferire la terna mobile ausiliaria, soprattutto a livello angolare. L'angolo formato tra i versori \mathbf{i} e \mathbf{i}_0 è l'angolo di imbardata ψ .

Nella successiva figura sono riportate le terne di cui sopra.

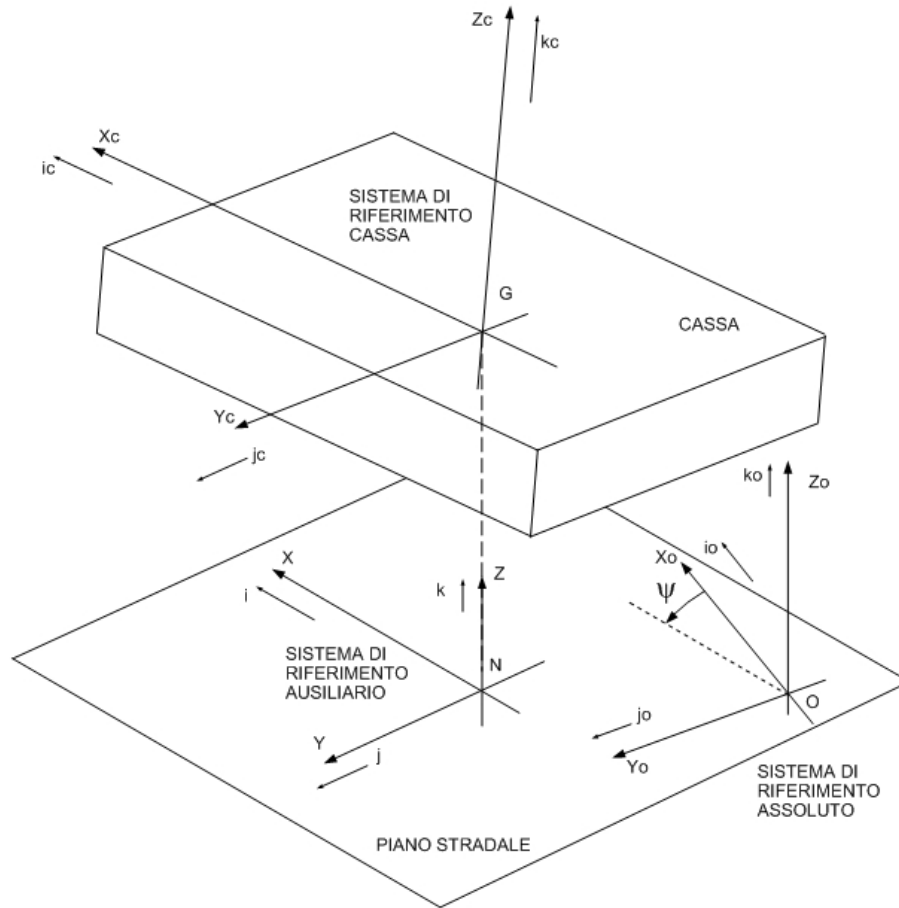


Fig 2.1 – Sistemi di riferimento utilizzati per la scrittura delle equazioni.

La generica disposizione della cassa è rappresentata in figura. L'asse y è la proiezione dell'asse y_c sul piano stradale, dunque il moto rotatorio della terna ausiliaria è comandato dalla rotazione della proiezione di tale asse. Questo significa che, nel caso in cui la rotazione istantanea della cassa avvenga intorno all'asse i questo non comporta nessun tipo di moto rotatorio della terna ausiliaria, mentre se avviene intorno all'asse k si ha una rotazione misurabile sul piano stradale.

Per quanto riguarda invece il moto traslatorio, questo è pilotato dal moto del baricentro nelle direzioni i e j , dunque il moto di traslazione verticale del baricentro della cassa non comporta lo spostamento dell'origine della terna ausiliaria.

Con questi riferimenti è quindi possibile scrivere le grandezze di interesse relative alla cassa.

In primo luogo deve essere scritta la velocità di traslazione del baricentro della cassa, utilizzando il teorema di composizione delle velocità, grazie proprio al sistema di riferimento ausiliario.

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_G^r + \mathbf{V}_G^r \quad (2.1)$$

Mettendosi dunque a bordo della terna $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, ed in particolare a bordo della sua origine N, la velocità assoluta del baricentro della cassa è la somma della velocità di trascinamento e della velocità relativa.

La velocità di trascinamento è quella del punto N, con componenti longitudinali e laterali rispettivamente u e v nel sistema di riferimento ausiliario.

$$\mathbf{V}_N = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} \quad (2.2)$$

Indicando con h l'altezza del baricentro da terra, è allora esplicitabile la posizione del baricentro della cassa relativa al sistema di riferimento ausiliario.

$$\mathbf{NG} = h \mathbf{k} \quad (2.3)$$

Ricomponendo tutti i termini, la velocità assoluta del baricentro della cassa può essere scritta in questo modo:

$$\mathbf{V}_G = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + \dot{h} \mathbf{k} \quad (2.4)$$

A questo punto si può passare alla scrittura della velocità angolare della cassa. Per far questo occorre definire gli assi corpo della cassa nel sistema di riferimento ausiliario. L'immagine seguente riporta la sequenza delle rotazioni che definiscono l'orientazione della cassa.

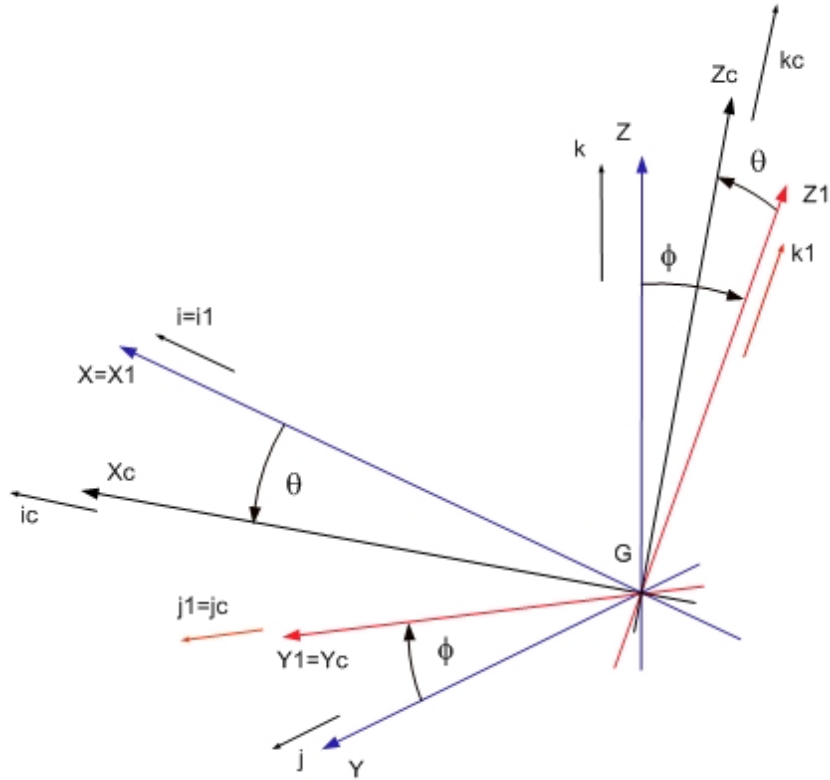


Fig 2.2 – Sequenza delle rotazioni che definiscono l'orientazione del sistema di riferimento della cassa

A partire dal riferimento ausiliario (di colore blu in figura), la sequenza di rotazioni prevede una prima rotazione dell'angolo di rollio Φ intorno all'asse \mathbf{i} . Questa rotazione va quindi a definire una nuova terna intermedia (rappresentata di colore rosso), che può essere individuata dagli assi \mathbf{i}_Φ , \mathbf{j}_Φ , \mathbf{k}_Φ (in figura indicati con X1, Y1, K1), coincidente con il riferimento assi corpo dopo la prima rotazione. Assumendo per ipotesi che le rotazioni siano piccole vista la tipologia di vettura, è possibile fornire subito una scrittura linearizzata dei versori della terna intermedia, intorno al valore nullo dell'angolo di rollio, dunque

$$\mathbf{i}_\phi = \mathbf{i} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{j}_\phi = \mathbf{j} + \phi \mathbf{k} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{k}_\phi = \mathbf{k} - \phi \mathbf{j} \quad (2.7)$$

La seconda rotazione invece è quella associata al moto di beccheggio e avviene intorno al nuovo asse \mathbf{j}_Φ di un angolo θ .

Dopo la rotazione θ quindi, si arriva alla definitiva orientazione della terna solidale rispetto a quella ausiliaria (in figura di colore nero).

La scrittura linearizzata dei versori della terna solidale nel riferimento intermedio in funzione dell'angolo θ è quindi la seguente

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{i}_\phi - \theta \mathbf{k}_\phi \quad (2.8)$$

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j}_\phi \quad (2.9)$$

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k}_\phi + \theta \mathbf{i}_\phi \quad (2.10)$$

Combinando i sei versori scritti, si ottengono quelli del riferimento solidale, linearizzati intorno a rollio e beccheggio nulli, nel riferimento mobile ausiliario.

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{i} - \theta \mathbf{k} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j} + \phi \mathbf{k} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k} - \phi \mathbf{j} + \theta \mathbf{i} \quad (2.13)$$

Indicando infine con ψ l'angolo di rotazione relativa tra la terna ausiliaria e quella assoluta, è adesso scrivibile la velocità angolare della cassa attraverso il teorema di composizione delle velocità angolari

$$\boldsymbol{\omega}_c = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\phi} \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j}_\phi \quad (2.14)$$

Risulterà molto utile in seguito utilizzare le componenti della velocità angolare della cassa nel proprio riferimento per la scrittura del momento angolare della cassa rispetto al proprio baricentro.

Per ricavarle basta fare il prodotto vettoriale tra il vettore appena scritto e i versori della cassa.

Indicando con p_c, q_c ed r_c le componenti della velocità angolare della cassa nel proprio riferimento, si ha:

$$p_c = \boldsymbol{\omega}_c \cdot \mathbf{i}_c \quad (2.15)$$

$$q_c = \boldsymbol{\omega}_c \cdot \mathbf{j}_c \quad (2.16)$$

$$r_c = \boldsymbol{\omega}_c \cdot \mathbf{k}_c \quad (2.17)$$

i cui risultati, anch'essi linearizzati nell'intorno del vettore nullo di componenti θ e Φ , sono:

$$p_c = \dot{\phi} - \dot{\psi} \cdot \theta \quad (2.18)$$

$$q_c = \dot{\theta} + \phi \dot{\psi} \quad (2.19)$$

$$r_c = \dot{\psi} \quad (2.20)$$

Tutte le rotazioni e le velocità angolari sono ovviamente da intendersi positive se rispettanti la regola della mano destra.

2.2 Dinamica della cassa – Scrittura delle Equazioni Cardinali

In questo paragrafo viene trattata la scrittura delle equazioni della dinamica attraverso l'analisi del termine inerziale e di quello forzante.

La strada percorsa per formulare le equazioni di equilibrio, prevede di considerare la cassa del veicolo come un corpo rigido sul quale agiscono forze e momenti, provenienti dalle ruote, da considerare applicati a quattro particolari punti che sono i centri ruota, come anticipato all'inizio del capitolo. In pratica quindi la cassa è un corpo “sospeso” su questi particolari punti, mobili nel suo riferimento, e risponde in base alle azioni che complessivamente riceve dai centri ruota.

Le azioni hanno in generale 3 componenti di forza e 3 di momento nel riferimento solidale. L'immagine di seguito riportata schematizza le azioni agenti sul generico centro ruota (in questo caso il centro $c11$) provenienti dalla generica ruota (in questo caso la ruota 11).

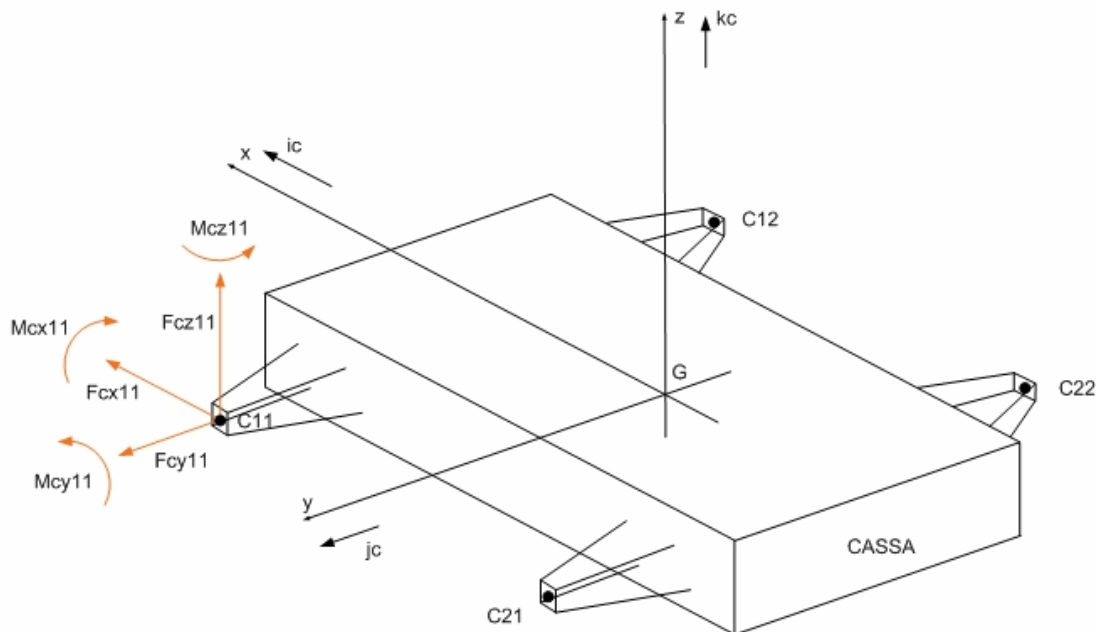


Fig 2.3 – Azioni agenti sulla cassa attraverso i centri ruota

Per la scrittura integrale delle equazioni serve necessariamente anche lo studio dell'equilibrio delle ruote, che infatti ricevono azioni dalla cassa e dalla strada.

Le ultime dipendono da come la affrontano, oltre che dal carico verticale agente sui pneumatici (in generale possono essere ipotizzati legami anche con parametri diversi da scorrimento e carico verticale come ad esempio la temperatura piuttosto che la pressione di gonfiaggio dei pneumatici ecc...).

2.2.1 Scrittura dei termini inerziali

I termini inerziali da scrivere sono quello di traslazione derivante dall'accelerazione lineare del baricentro della cassa del veicolo e quello di rotazione derivante dall'accelerazione angolare istantanea della cassa.

Per quanto riguarda il primo aspetto, è necessario scrivere l'accelerazione del baricentro, per poi moltiplicarla semplicemente per la massa della cassa.

Sfruttando il teorema di composizione delle accelerazioni, si può scrivere:

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_G^{tr} + \mathbf{a}_G^r + \mathbf{a}_G^{Co} \quad (2.21)$$

Nel caso in cui, come fatto precedentemente, la terna usata per applicare il suddetto teorema sia quella di versori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , l'accelerazione di Coriolis è nulla, perché la velocità angolare di trascinamento della terna e la velocità relativa del punto materiale G sono sempre costantemente paralleli tra loro, dunque il loro prodotto vettoriale è sempre nullo.

L'accelerazione assoluta quindi è data dalla somma dei soli contributi di accelerazione di trascinamento e relativa.

Il primo termine è rappresentato dalla derivata della velocità del punto N, che come detto, nei versori \mathbf{i} , \mathbf{j} , ha componenti u e v . Dovendo considerare la variabilità anche degli stessi versori, il termine di trascinamento è quindi esprimibile in questo modo:

$$\mathbf{a}_G^{tr} = \dot{u} \cdot \mathbf{i} + \dot{v} \cdot \mathbf{j} + u \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} + v \cdot \frac{d\mathbf{j}}{dt} \quad (2.22)$$

La scrittura del termine relativo invece è ancora più diretta.

$$\mathbf{a}_G^r = \ddot{h} \cdot \mathbf{k} \quad (2.23)$$

Ricomponendo i termini si ottiene quindi:

$$\mathbf{a}_G = \dot{u} \cdot \mathbf{i} + \dot{v} \cdot \mathbf{j} + u \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} + v \cdot \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \ddot{h} \cdot \mathbf{k} \quad (2.24)$$

Dalle *Formule di Poisson* possono essere esplicitate le derivate temporali dei versori \mathbf{i} e \mathbf{j} :

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\psi} \cdot \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} \quad (2.25)$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \dot{\psi} \cdot \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} \quad (2.26)$$

Il termine inerziale di tipo traslatorio, con componenti relative al riferimento ausiliario è quindi:

$$m \mathbf{a}_G = m [(\dot{u} - \dot{\psi} \cdot v) \mathbf{i} + (\dot{v} + \dot{\psi} \cdot u) \mathbf{j} + \ddot{h} \cdot \mathbf{k}] \quad (2.27)$$

A questo punto serve l'espressione del termine inerziale di rotazione.

Il primo passo è quindi quello di scrivere il momento angolare della cassa, per farne poi la derivata temporale.

Per la scrittura del momento angolare della cassa è necessario fare il prodotto, tra il suo tensore d'inerzia e il vettore velocità angolare scritto con componenti solidali.

Ipotizzando trascurabili i momenti d'inerzia centrifughi I_{cxy} e I_{cyz} , il tensore di inerzia può essere scritto in questo modo:

$$\mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} I_{cxx} & 0 & I_{cxz} \\ 0 & I_{cyy} & 0 \\ I_{cxz} & 0 & I_{czz} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Il momento angolare scritto nel riferimento della cassa è il prodotto matriciale tra il tensore di inerzia della cassa (2.28) e il vettore velocità angolare nello stesso riferimento (2.18-20).

$$\mathbf{L}_G = \begin{bmatrix} I_{cxx} & 0 & I_{cxz} \\ 0 & I_{cyy} & 0 \\ I_{cxz} & 0 & I_{czz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_c \\ q_c \\ r_c \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

La sua derivata temporale, sempre nel riferimento cassa, è quindi:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = \mathbf{I}_C \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_c \\ q_c \\ r_c \end{bmatrix} \right) + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{L}_G \quad (2.30)$$

Per passare al sistema di riferimento ausiliario, è necessario premoltiplicare il momento angolare per la matrice di rotazione \mathbf{R}_c vigente tra i due riferimenti.

La matrice di rotazione è facilmente ricavabile dalla scrittura dei versori della terna solidale (2.11-13) nel riferimento ausiliario, ottenendo

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\Phi \\ -\theta & \Phi & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Il momento angolare della cassa rispetto al proprio baricentro scritto nel riferimento ausiliario è quindi

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{R}_c \begin{bmatrix} I_{cxx} & 0 & I_{cxz} \\ 0 & I_{cyy} & 0 \\ I_{cxz} & 0 & I_{czz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_c \\ q_c \\ r_c \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

La sua derivata temporale si può ottenere semplicemente dalla regola della derivata del prodotto.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{R}_c \left(\mathbf{I}_c \begin{bmatrix} p_c \\ q_c \\ r_c \end{bmatrix} \right) + \mathbf{R}_c \mathbf{I}_c \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_c \\ q_c \\ r_c \end{bmatrix} \right) \quad (2.33)$$

Come già anticipato precedentemente, trattandosi di una vettura con assetto sportivo, gli angoli di rollio e di beccheggio, definiti come si è visto, sono sicuramente piccoli.

Non a caso si è fornita una scrittura linearizzata dei versori \mathbf{i}_c , \mathbf{j}_c , \mathbf{k}_c nel riferimento ausiliario attraverso gli angoli di rollio e beccheggio.

Un procedimento analogo può essere adottato per tutta la trattazione relativa alla scrittura delle Equazioni Cardinali.

In questo modo è possibile semplificare notevolmente la struttura delle equazioni senza praticamente commettere errori.

Per arrivare alla versione linearizzata delle equazioni è necessario definire in primo luogo il vettore delle grandezze intorno al quale si vuole fare lo sviluppo lineare (o del primo ordine) e in secondo luogo la funzione che si occupa di fare tale operazione.

Il vettore \mathbf{v} delle variabili del sistema che viene preso per la linearizzazione è riportato di seguito, scomposto in due sottovettori per motivi di spazio

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]^T \quad \text{dove} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{v}_1 = (\Phi \quad \theta \quad \dot{\Phi} \quad \dot{\theta} \quad \ddot{\Phi} \quad \ddot{\theta} \quad \dot{h} \quad \ddot{h}) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{v}_2 = (\delta_{11} \quad \delta_{12} \quad \delta_{21} \quad \delta_{22} \quad \gamma_{11} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{22} \quad \chi_{11} \quad \chi_{12} \quad \chi_{21} \quad \chi_{22})$$

I primi otto termini, ovvero le componenti del vettore \mathbf{v}_1 , sono le derivate nulle, prime e seconde di grandezze che definiscono la posizione relativa della cassa nel riferimento ausiliario. I successivi dodici termini invece, appartenenti al vettore \mathbf{v}_2 e rappresentati dalle grandezze δ_{ij} , γ_{ij} e χ_{ij} , esprimono gli angoli la cui combinazione definisce l'orientazione del portamozzo della generica ruota ij durante il moto della sospensione all'interno del sistema di riferimento solidale alla cassa.

Le grandezze δ_{ij} , rappresentano gli angoli di cui ruotano i portamozzi delle ruote intorno all'asse \mathbf{k}_c , γ_{ij} definiscono le rotazioni intorno ai nuovi assi longitudinali, mentre χ_{ij} quelle intorno all'asse della ruota. Il valore del vettore \mathbf{v} intorno cui effettuare lo Sviluppo in Serie di Taylor delle funzioni che entrano in gioco nella dinamica del veicolo è il vettore nullo, ovvero le grandezze sopra indicate sono ipotizzabili tendenti a zero durante il moto del veicolo. Dunque:

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0} \quad (2.36)$$

Definito quindi il vettore intorno al quale effettuare lo sviluppo al primo ordine delle grandezze che entrano in gioco nelle equazioni, rimane da implementare l'algoritmo che effettivamente compie tale operazione.

In ambiente Mathematica, all'algoritmo è stato dato il nome di “sviluppoInSerie”.

Questo particolare operatore non è altro che la vera definizione di sviluppo al primo ordine di una funzione, in generale di più variabili, nell'intorno del vettore voluto. Nel caso in esame trattasi del vettore nullo.

Conseguentemente, una generica funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ che dipende dal vettore \mathbf{v} , (ma anche in generale da variabili che non sono contenute nel vettore \mathbf{v}) può essere espressa come il valore della funzione calcolato quando il vettore assume il valore di riferimento, sommato alla combinazione lineare delle derivate parziali prime della funzione fatte rispetto alle componenti di \mathbf{v} e calcolate nel vettore di riferimento, moltiplicate poi per le variazioni delle componenti stesse. Dunque:

$$\text{SviluppoInSerie}(f) = f(\bar{\mathbf{v}}) + \sum_i \left. \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial v_i} \right|_{\bar{\mathbf{v}}} \cdot (v_i - v_{io}) \quad (2.37)$$

dove con q_i si sono indicate le singole variabili da cui dipende la funzione in esame, mentre con q_{j0} il loro valore intorno al quale avviene lo sviluppo.

Applicando quanto detto alla derivata del momento angolare della cassa rispetto al proprio baricentro, il software Mathematica fornisce finalmente il seguente risultato.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = & (I_{c_{xx}}\ddot{\phi} + I_{c_{xz}}\ddot{\psi} + \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{c_{zz}} - I_{c_{yy}} - I_{c_{xx}}) + \theta\dot{\psi}(I_{c_{zz}} - I_{c_{xx}}) + \\ & \dot{\psi}^2\phi(I_{c_{zz}} - I_{c_{yy}}))\mathbf{i} + (I_{c_{xz}}\dot{\psi}^2 + I_{c_{yy}}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{c_{xx}} + I_{c_{yy}} - I_{c_{zz}}) + \\ & \dot{\psi}^2\theta(I_{c_{zz}} - I_{c_{xx}}) + \dot{\psi}\phi(I_{c_{yy}} - I_{c_{zz}}))\mathbf{j} + (I_{c_{xz}}\ddot{\phi} - 2\dot{\theta}\dot{\psi}I_{c_{xz}} + I_{c_{zz}}\ddot{\psi} - 2\theta\dot{\psi}I_{c_{xz}})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.38)$$

I termini inerziali sono quindi stati esplicitati.

2.2.2 Scrittura dei termini forzanti

Per quello che riguarda le azioni esterne applicate alla cassa, queste ovviamente sono da suddividersi in forze per lo studio dell'equilibrio a traslazione ed in coppie e momenti delle forze per quanto riguarda invece lo studio dell'equilibrio a rotazione della cassa.

In base a quanto detto nell'introduzione alla Dinamica della cassa, possono ora essere scritte le espressioni relative alla forza peso agente sulla cassa e alle forze e momenti provenienti dai quattro centri ruota.

$$\mathbf{P} = -m \cdot g \mathbf{k} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{F}_{c11} = F_{cx11} \cdot \mathbf{i}_c + F_{cy11} \cdot \mathbf{j}_c + F_{cz11} \cdot \mathbf{k}_c$$

$$\mathbf{F}_{c12} = F_{cx12} \cdot \mathbf{i}_c + F_{cy12} \cdot \mathbf{j}_c + F_{cz12} \cdot \mathbf{k}_c$$

(2.40)

$$\mathbf{F}_{c21} = F_{cx21} \cdot \mathbf{i}_c + F_{cy21} \cdot \mathbf{j}_c + F_{cz21} \cdot \mathbf{k}_c$$

$$\mathbf{F}_{c22} = F_{cx22} \cdot \mathbf{i}_c + F_{cy22} \cdot \mathbf{j}_c + F_{cz22} \cdot \mathbf{k}_c$$

$$\mathbf{M}_{c11} = M_{cx11} \cdot \mathbf{i}_c + M_{cy11} \cdot \mathbf{j}_c + M_{cz11} \cdot \mathbf{k}_c$$

$$\mathbf{M}_{c12} = M_{cx12} \cdot \mathbf{i}_c + M_{cy12} \cdot \mathbf{j}_c + M_{cz12} \cdot \mathbf{k}_c$$

(2.41)

$$\mathbf{M}_{c21} = M_{cx21} \cdot \mathbf{i}_c + M_{cy21} \cdot \mathbf{j}_c + M_{cz21} \cdot \mathbf{k}_c$$

$$\mathbf{M}_{c22} = M_{cx22} \cdot \mathbf{i}_c + M_{cy22} \cdot \mathbf{j}_c + M_{cz22} \cdot \mathbf{k}_c$$

Ovviamente espressioni simili valgono per la forza peso delle ruote, ipotizzate tutte uguali. Da precisare che queste forze, nella realtà presenti in quanto alle ruote è associata una massa, in questo sono come forze esterne agenti isolatamente.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{11} &= -m_1 \cdot g \cdot \mathbf{k} \\
\mathbf{P}_{12} &= -m_1 \cdot g \cdot \mathbf{k} \\
\mathbf{P}_{21} &= -m_1 \cdot g \cdot \mathbf{k} \\
\mathbf{P}_{22} &= -m_1 \cdot g \cdot \mathbf{k}
\end{aligned}
\tag{2.42}$$

La forza risultante che quindi agisce sulla cassa è la somma delle forze applicate nei centri ruota e della sua forza peso. Il secondo membro della Prima Equazione Cardinale è allora il seguente:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{c11} + \mathbf{F}_{c12} + \mathbf{F}_{c21} + \mathbf{F}_{c22} + \mathbf{P} \tag{2.43}$$

Per il calcolo del momento risultante rispetto al baricentro agente sulla cassa, nonché il secondo membro della Seconda Equazione Cardinale, è necessario esprimere la posizione dei centri ruota rispetto al baricentro. Nella scrittura dei raggi vettori in esame l'ipotesi è quella di trascurare gli spostamenti longitudinali e laterali dei centri, ma non ovviamente quelli verticali.

In generale è quindi possibile scrivere le posizioni in esame ancora una volta come combinazione lineare dei versori del riferimento solidale. In particolare, la posizione del generico centro ruota verrà individuata attraverso il semipasso anteriore o posteriore, attraverso la semicarreggiata anteriore o posteriore e dalla posizione verticale del centro ruota rispetto al piano individuato dai versori $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c$.

Indicando con a_1 e a_2 rispettivamente i semipassi anteriore e posteriore, con t_1 e t_2 rispettivamente le semicarreggiate anteriori e posteriori, nel riferimento in esame le posizioni sono allora esprimibili come:

$$\begin{aligned}
\mathbf{GC}_{11} &= a_1 \cdot \mathbf{i}_c + t_1 \cdot \mathbf{j}_c + z_{c11} \cdot \mathbf{k}_c \\
\mathbf{GC}_{12} &= a_1 \cdot \mathbf{i}_c - t_1 \cdot \mathbf{j}_c + z_{c12} \cdot \mathbf{k}_c \\
\mathbf{GC}_{21} &= -a_2 \cdot \mathbf{i}_c + t_2 \cdot \mathbf{j}_c + z_{c21} \cdot \mathbf{k}_c \\
\mathbf{GC}_{22} &= -a_2 \cdot \mathbf{i}_c - t_2 \cdot \mathbf{j}_c + z_{c22} \cdot \mathbf{k}_c
\end{aligned}
\tag{2.44}$$

A questo punto entra in gioco un aspetto molto importante quale la scrittura delle espressioni relative alle posizioni verticali z_{Cij} dei quattro centri ruota nel riferimento solidale alla cassa, che in realtà non sono le vere e proprie escursioni delle ruote.

Da considerazioni di congruenza geometrica, si possono ricavare le espressioni che legano le posizioni di cui sopra all'altezza del baricentro, all'angolo di rollio e a quello di beccheggio, oltre che alle dimensioni intrinseche del veicolo, quali semipassi e semicarreggiate.

Procedendo anche in questo caso secondo la logica di linearizzazione nell'intorno del vettore nullo, si può scrivere:

$$\begin{aligned} z_{C_{11}} &= R_1 - (h + t_1 \Phi) + a_1 \theta \\ z_{C_{12}} &= R_1 + (-h + t_1 \Phi) + a_1 \theta \\ z_{C_{21}} &= R_2 - (h + t_2 \Phi) - a_2 \theta \\ z_{C_{22}} &= R_2 + (-h + t_2 \Phi) - a_2 \theta \end{aligned} \quad (2.45)$$

A questo punto ci sono tutti gli elementi necessari per poter scrivere il momento risultante rispetto al baricentro. Per motivi di spazio viene suddiviso in due contributi, uno di puro momento (\mathbf{M}_{G1}) e l'altro di momento delle forze (\mathbf{M}_{G2}).

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{M}_{G1} + \mathbf{M}_{G2} \quad (2.46)$$

I singoli contributi sono di seguito riportati.

$$\mathbf{M}_{G1} = \mathbf{M}_{c11} + \mathbf{M}_{c12} + \mathbf{M}_{c21} + \mathbf{M}_{c22} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{M}_{G2} = \mathbf{GC}_{11} \wedge \mathbf{F}_{c11} + \mathbf{GC}_{12} \wedge \mathbf{F}_{c12} + \mathbf{GC}_{21} \wedge \mathbf{F}_{c21} + \mathbf{GC}_{22} \wedge \mathbf{F}_{c22} \quad (2.48)$$

In ultimo, derivando le espressioni delle posizioni verticali dei centri ruota, è possibile ottenere quelle delle velocità relative di escursione delle ruote rispetto alla cassa del veicolo.

$$\begin{aligned}
\frac{dzC_{11}}{dt} &= -(\dot{h} + t_1 \dot{\Phi}) + a_1 \dot{\theta} \\
\frac{dzC_{12}}{dt} &= (-\dot{h} + t_1 \dot{\Phi}) + a_1 \dot{\theta} \\
\frac{dzC_{21}}{dt} &= -(\dot{h} + t_2 \dot{\Phi}) - a_2 \dot{\theta} \\
\frac{dzC_{22}}{dt} &= (-\dot{h} + t_2 \dot{\Phi}) - a_2 \dot{\theta}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

2.3 Struttura Matriciale e Linearizzazione delle Equazioni Cardinali

Il passo successivo a tutto quello fatto finora è ovviamente l'imposizione dell'uguaglianza dei termini scritti.

La formulazione delle due Equazioni Cardinali della Dinamica, viste le semplificazioni fatte sulla scrittura dei versori degli assi corpo, può anch'essa passare attraverso la linearizzazione di ambo i membri per tutte le equazioni che prendono parte all'equilibrio.

Questo significa uguagliare due termini, entrambi linearizzati nell'intorno del valore nullo del vettore di riferimento, per entrambe le equazioni.

Ecco quindi che in questo modo vengono ad essere generate 6 equazioni di equilibrio della cassa linearizzate nelle grandezze viste sopra.

Matematicamente quindi è possibile formulare le 6 equazioni nel seguente modo:

- Prima equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{i}_c] = \text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{F}_{c11} + \mathbf{F}_{c12} + \mathbf{F}_{c21} + \mathbf{F}_{c22} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{i}_c] \tag{2.50}$$

- Seconda equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{j}_c] = \text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{F}_{c11} + \mathbf{F}_{c12} + \mathbf{F}_{c21} + \mathbf{F}_{c22} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{j}_c] \tag{2.51}$$

- Terza equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{k}_c] = \text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{F}_{c11} + \mathbf{F}_{c12} + \mathbf{F}_{c21} + \mathbf{F}_{c22} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{k}_c] \quad (2.52)$$

- Quarta equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[\dot{\mathbf{L}}_G \cdot \mathbf{i}_c] = \text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{M}_G) \cdot \mathbf{i}_c] \quad (2.53)$$

- Quinta equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[\dot{\mathbf{L}}_G \cdot \mathbf{j}_c] = \text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{M}_G) \cdot \mathbf{j}_c] \quad (2.54)$$

- Sesta equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[\dot{\mathbf{L}}_G \cdot \mathbf{k}_c] = \text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{M}_G) \cdot \mathbf{k}_c] \quad (2.55)$$

Arrivati a questo punto, sono a disposizione 6 equazioni differenziali, ognuna con un proprio ordine che dipende dalle grandezze che si sono scelte per scrivere i termini inerziali.

Il vettore degli ingressi, rappresentato dal termine a destra dell'uguale, dipende dalle forze e dai momenti direttamente applicati ai quattro centri ruota, che a loro volta però dipendono dal moto del veicolo.

La risoluzione delle equazioni quindi deve passare attraverso la definizione del reale vettore delle incognite, necessariamente rappresentato dall'insieme delle derivate massime delle grandezze da trovare.

Definito il vettore delle incognite, è dunque possibile strutturare il sistema di equazioni in forma matriciale, in modo da avere un sistema di equazioni, che nelle incognite scelte, di fatto è algebrico.

Per il momento, il vettore delle incognite è quindi il seguente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \ddot{h} & \ddot{\psi} & \ddot{\phi} & \ddot{\theta} \end{pmatrix}^T \quad (2.56)$$

Le grandezze che entrano all'interno del vettore delle incognite, sono infatti associate alla sola cassa.

Questo è in linea con l'ipotesi di trascurare le proprietà di inerzia delle ruote che, in quanto tali, è come se non esistessero, quindi prive di grandezze che ne descrivono il moto.

Di conseguenza, oltre alle componenti del vettore \mathbf{x} sopra elencate, le uniche incognite aggiuntive alle sei finora elencate sono le quattro forze verticali di contatto a terra.

Il vettore completo delle incognite è allora il seguente:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \ddot{h} & \ddot{\psi} & \ddot{\phi} & \ddot{\theta} & F_{z11} & F_{z12} & F_{z21} & F_{z22} \end{pmatrix}^T \quad (2.57)$$

A questo punto, per strutturare l'attuale sistema di 6 equazioni in 10 incognite in forma matriciale, basta semplicemente costruire la matrice dei coefficienti e il vettore degli ingressi.

La matrice dei coefficienti sarà quindi di dimensione 6x10 mentre il vettore degli ingressi sarà un vettore colonna di dimensione 6.

Ovviamente le ultime 4 colonne della matrice dei coefficienti saranno tutti vettori nulli, in quanto le incognite F_{zij} non compaiono nelle equazioni fino a questo momento disponibili.

La trasformazione in forma matriciale delle 6 equazioni scritte origina quindi la matrice dei coefficienti \mathbf{A} ed il vettore dei termini noti \mathbf{b} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m\theta & -m\phi & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{cxz} - I_{cxx}\theta & I_{cxx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{cyy}\phi & 0 & I_{cyy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{czz} - I_{cxz}\theta & I_{cxz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Per motivi di eccessiva complessità analitica, non viene riportata l'effettiva struttura delle singole componenti del vettore degli ingressi in quanto troppo articolata. Viene però riportata la sua più elementare struttura.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Per chiarezza, anche se le espressioni non sono esplicitamente riportate, le componenti del vettore degli ingressi sono gli sviluppi in Serie di Taylor dei termini a destra dell'uguale delle 6 rispettive equazioni, cui sottrarre tutti i termini derivanti dallo sviluppo del termine inerziale (a sinistra del segno di uguale) che non presentano le vere incognite al loro interno.

Ad esempio, il termine inerziale della prima equazione è così strutturato:

$$\text{SviluppoInSerie} [m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{i}_c] = m (\dot{u} - v \dot{\psi}) \quad (2.60)$$

L'unica incognita presente nell'espressione è la derivata di u . L'altro termine è il prodotto della massa m , della velocità v (ricavabile dall'integrazione della sua derivata) e dalla derivata di ψ (anch'essa ricavabile per integrazione della derivata seconda di ψ), quindi deve essere locato a destra del segno di uguale, andandosi ad inglobare nello sviluppo di Taylor del termine forzante.

Non a caso, nella prima riga, la matrice \mathbf{A} contiene sono la massa m .

Per integrare adesso la matrice dei coefficienti con una sottomatrice di dimensione 4x10, unitamente all'integrazione del vettore degli ingressi con altre 4 componenti, è strettamente necessario passare dallo studio completo dell'equilibrio delle ruote.

Solo in questo modo infatti il vettore delle incognite può essere completamente determinato. Servono infatti altre 4 equazioni aggiuntive che consentano di aumentare le informazioni che legano tutte le grandezze in gioco. In questa prima fase, le ruote sono considerate prive di massa e di tensore d'inerzia e questa ipotesi potrebbe consentire uno studio molto più veloce della dinamica del sistema. Scrivendo infatti l'equilibrio del sistema nel caso in cui le azioni siano direttamente applicate nei punti di contatto a terra, le 6 equazioni di equilibrio, (anche se diverse da quelle viste) nelle ancora 10 incognite, potrebbero essere facilmente integrabili dalla scrittura delle 4 equazioni costitutive delle sospensioni per la determinazione delle forze verticali a terra.

Conseguentemente sarebbero note le forze laterali, grazie all'utilizzo delle equazioni di congruenza cinematica del veicolo per l'ottenimento degli angoli di assetto dei pneumatici, mentre quelle longitudinali sarebbero note attraverso la semplice imposizione dell'equilibrio a rotazione delle ruote intorno ai rispettivi assi di rotazione. Per le motivazioni però enunciate nella pagina iniziale, in ogni caso lo studio del sistema verte sulla separazione degli equilibri tra cassa e ruote.

Per l'analisi dell'equilibrio della generica ruota è anche in questo caso necessario esprimere l'orientazione del mozzo per poter esplicitare le forze agenti e questo può essere fatto tramite una terna solidale ad esso di versori \mathbf{i}_{ij} , \mathbf{j}_{ij} , \mathbf{k}_{ij} . Come fatto per la cassa, i versori possono essere espressi direttamente in forma linearizzata, perché gli angoli che ne caratterizzano l'orientazione alla cassa, possono essere considerati piccoli, anche per le ruote anteriori, dove in realtà si è ai limiti del concetto di linearizzazione, per la presenza del sistema di sterzo.

La figura sottostante riporta la generica configurazione del mozzo rispetto alla cassa.

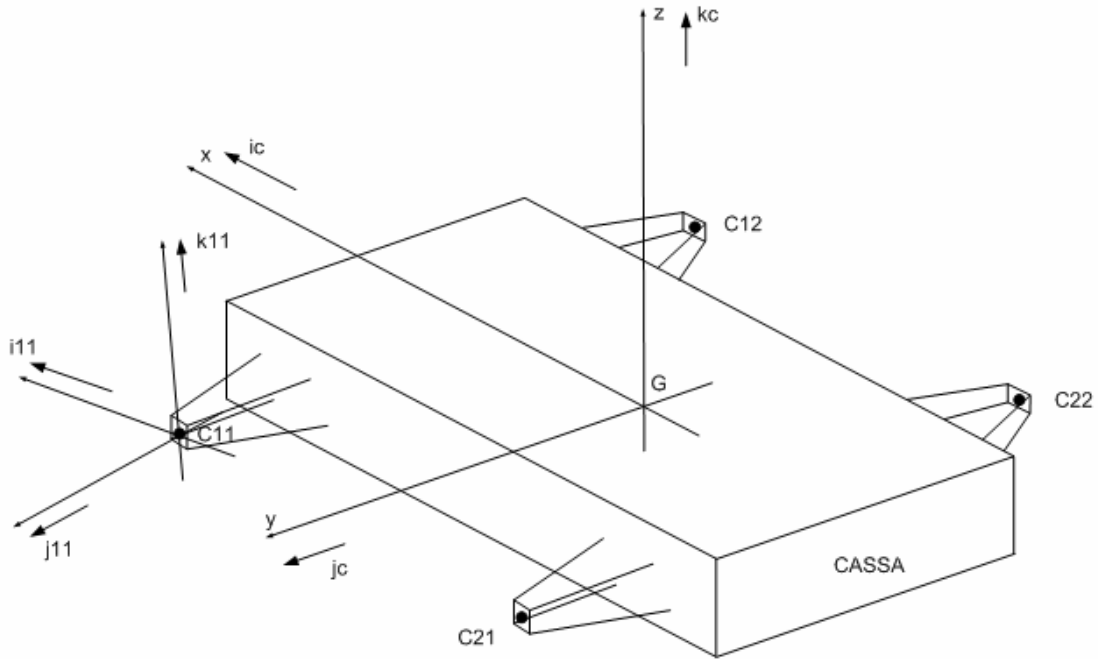


Fig 2.4 – Orientazione del sistema di riferimento del portamozzo rispetto alla cassa

Per lo studio della generica orientazione del portamozzo ruota rispetto alla cassa, sono stati definiti anche in questo caso 3 angoli di rotazione (anche questi entrano a far parte, come visto, del set di componenti del vettore \mathbf{v} intorno cui si effettua la linearizzazione).

Il primo è quello che definisce l'entità della rotazione che avviene intorno all'asse \mathbf{k}_c dell'angolo δ_{ij} , il secondo è quello che definisce la rotazione successiva intorno al nuovo asse longitudinale dell'angolo γ_{ij} , mentre il terzo è quello che definisce l'ultima rotazione intorno all'asse ruota dell'angolo χ_{ij} .

Le matrici che quindi caratterizzano le rotazioni elementari sono, nell'ordine appena descritto:

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} \cos \delta_{ij} & -\sin \delta_{ij} & 0 \\ \sin \delta_{ij} & \cos \delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_{ij} & -\sin \gamma_{ij} \\ 0 & \sin \gamma_{ij} & \cos \gamma_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{32} = \begin{bmatrix} \cos \chi_{ij} & 0 & \sin \chi_{ij} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \chi_{ij} & 0 & \cos \chi_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

La cui risultante è

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{10} \mathbf{A}^{21} \mathbf{A}^{32} \quad (2.62)$$

In questo modo sono scrivibili i versori del riferimento del portamozzo, in quello della cassa.

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{A} \mathbf{i}_c \quad \mathbf{j}_m = \mathbf{A} \mathbf{j}_c \quad \mathbf{k}_m = \mathbf{A} \mathbf{k}_c \quad (2.63)$$

Ovviamente è necessario precisare che gli angoli citati sono necessariamente funzione sia dell'escursione del centro ruota che dell'angolo di sterzo volante per le ruote anteriori. Distinguendo tra anteriori e posteriori con i rispettivi pedici 1 e 2:

$$\begin{aligned} \delta_{1j} &= \delta_{1j}(Z_{c1j}, \delta_v) & \delta_{2j} &= \delta_{2j}(Z_{c2j}) \\ \gamma_{1j} &= \gamma_{1j}(Z_{c1j}, \delta_v) & \gamma_{2j} &= \gamma_{2j}(Z_{c2j}) \\ \chi_{1j} &= \chi_{1j}(Z_{c1j}, \delta_v) & \chi_{2j} &= \chi_{2j}(Z_{c2j}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Passando anche in questo caso direttamente alla scrittura linearizzata dei versori in esame, e considerando che la sequenza delle rotazioni che definisce la disposizione del mozzo ruota è la stessa per tutte le ruote, si possono quindi fornire le espressioni generalizzate dei versori in esame:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{ij} &= \mathbf{i}_c + \delta_{ij} \mathbf{j}_c - \chi_{ij} \mathbf{k}_c \\ \mathbf{j}_{ij} &= -\delta_{ij} \mathbf{i}_c + \mathbf{j}_c + \gamma_{ij} \mathbf{k}_c \\ \mathbf{k}_{ij} &= \mathbf{k}_c - \gamma_{ij} \mathbf{j}_c + \chi_{ij} \mathbf{i}_c \end{aligned} \quad (2.65)$$

Il passo successivo è quello di determinare la direzione delle forze che agiscono sul pneumatico in modo da poterle combinare opportunamente per scrivere l'equilibrio della ruota.

L'obiettivo è quindi quello di determinare l'angolo di camber effettivo della ruota e l'angolo di sterzo a terra, per avere la direzione di azione della forza longitudinale e quindi anche di quella laterale, oltre che le espressioni dei momenti. Anche per la trattazione di questi aspetti si procede in modo analogo a quanto fatto finora, ovvero trattando subito espressioni linearizzate.

Per quanto riguarda l'angolo di camber, questo è ricavabile semplicemente dal prodotto vettoriale tra il versore ortogonale al terreno e l'asse della ruota stessa. L'arcoseno del risultato non è altro che l'angolo di camber effettivo.

Trattandosi di considerazioni valide per tutte le ruote, si può scrivere:

$$\gamma_{sij} = \text{Arcsen}(\mathbf{j}_{ij} \cdot \mathbf{k}) \quad (2.66)$$

Per determinare l'angolo di sterzo a terra è necessario definire il generico versore longitudinale della ruota che definisce la direzione della forza longitudinale applicata al pneumatico.

Indicandolo con \mathbf{i}_{sij} , si può quindi scrivere:

$$\mathbf{i}_{sij} = \frac{(\mathbf{j}_{ij} \wedge \mathbf{k})}{\sqrt{1 - (\mathbf{j}_{ij} \cdot \mathbf{k})^2}} \quad (2.67)$$

A questo punto l'angolo di sterzo a terra può essere esplicitato attraverso la seguente combinazione di prodotti tra versori:

$$\delta_{sij} = \text{Arcsen}(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}_{sij})) \quad (2.68)$$

Non rimane quindi che riportare i risultati della linearizzazione dei versori e delle grandezze scalari trattate in queste ultime due pagine, riportando, per i primi, le relative componenti nel sistema di riferimento mobile ausiliario.

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{ij} &= [1 \quad \delta_{ij} \quad -\theta - \chi_{ij}]^T \\ \mathbf{j}_{ij} &= [-\delta_{ij} \quad 1 \quad \gamma_{ij} + \phi]^T \\ \mathbf{k}_{ij} &= [\theta + \chi_{ij} \quad -\gamma_{ij} - \phi \quad 1]^T \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{i}_{sij} = [1 \quad \delta_{ij} \quad 0]^T \quad (2.70)$$

$$\mathbf{j}_{sij} = [-\delta_{ij} \quad 1 \quad 0]^T$$

$$\gamma_{sij} = \gamma_{ij} + \phi \quad (2.71)$$

$$\delta_{sij} = \delta_{ij}$$

In questo modo è possibile scrivere le forze e i momenti che agiscono sulla generica ruota ij attraverso componenti di interesse ai fini della dinamica del veicolo, nonché il modulo della forza normale a terra, quello della forza di deriva e quello della forza longitudinale agente sul pneumatico. Schematicamente si riportano i versori di interesse appena scritti, nel caso della ruota anteriore sinistra, ovvero la 11.

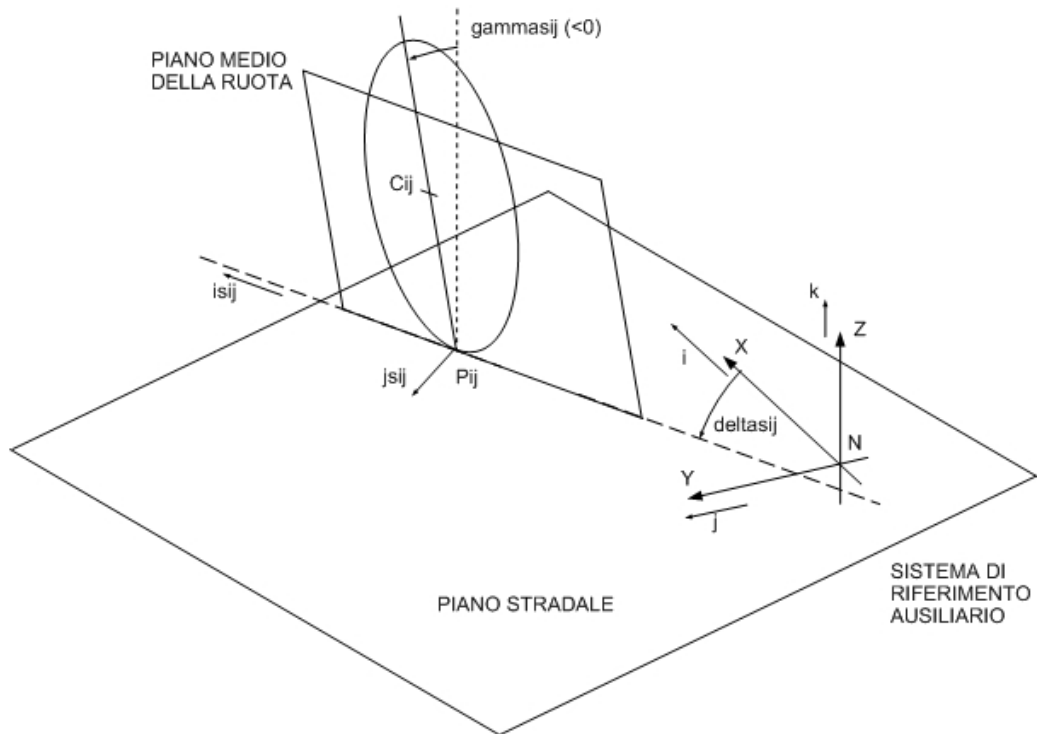


Fig 2.5 – Assetto effettivo della ruota

Con i versori appena trattati, possono essere quindi scritte le risultanti di forza e momento agenti sul pneumatico nel punto di contatto a terra.

$$\mathbf{F}_{ij} = Fx_{ij}\mathbf{i}_{sij} + Fy_{ij}\mathbf{j}_{sij} + Fz_{ij}\mathbf{k} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = Mx_{ij}\mathbf{i}_{sij} + My_{ij}\mathbf{j}_{sij} + Mz_{ij}\mathbf{k}$$

In questo modo le componenti che definiscono la “disposizione spaziale” della generica azione hanno un significato fisico vero e proprio direttamente legato al comportamento del pneumatico. In particolare, la forza Fy_{ij} è la vera e propria forza di deriva, la forza Fx_{ij} è la vera e propria forza longitudinale applicata al pneumatico, mentre la forza Fz_{ij} è la forza verticale di contatto a terra.

Per quanto riguarda invece il vettore momento \mathbf{M}_{ij} , le sue componenti sono rispettivamente il momento di ribaltamento del pneumatico, quello di rotolamento e quello di autoallineamento.

In figura è anche rappresentato il vettore che dal centro ruota punta verso il punto di contatto a terra $P11$. Tale vettore serve per poter scrivere il momento della forza risultante \mathbf{F}_{11} rispetto al centro ruota $C11$. Arrivati a questo punto non resta che scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione e rotazione della ruota prendendo il centro ruota come polo per il calcolo dei momenti. Ancora una volta si procede attraverso la linearizzazione della scrittura, in modo coerente con quanto fatto fino a questo momento, considerando ovviamente che nel centro ruota agiscono, uguali e contrarie, tutte le azioni che interessano la cassa in quei punti.

Le sei equazioni di equilibrio della generica ruota, sono quindi le seguenti:

- Prima equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{P}_{ij} - \mathbf{F}_{cij} + \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{i}_c] = 0 \quad (2.73)$$

- Seconda equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{P}_{ij} - \mathbf{F}_{cij} + \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{j}_c] = 0 \quad (2.74)$$

- Terza equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{P}_{ij} - \mathbf{F}_{cij} + \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{k}_c] = 0 \quad (2.75)$$

- Quarta equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{cij} + \mathbf{C}_{ij}\mathbf{P}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{i}_c] = 0 \quad (2.76)$$

- Quinta equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{cij} + \mathbf{C}_{ij}\mathbf{P}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{j}_c] = 0 \quad (2.77)$$

- Sesta equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{cij} + \mathbf{C}_{ij}\mathbf{P}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{k}_c] = 0 \quad (2.78)$$

Imponendo l'equilibrio delle ruote, si è allora aggiunto un totale di 24 equazioni alle 6 scritte precedentemente per l'equilibrio della cassa, per un totale di 30 equazioni che governano la dinamica dell'intero veicolo.

In queste equazioni, le incognite, ovvero le grandezze che non sono note a priori, ma che devono essere trovate dalla risoluzione del sistema, sono 34.

Infatti, alle 10 incognite raccolte nel vettore \mathbf{x} , bisogna sommare le 24 componenti che complessivamente definiscono lo scambio di forza e di coppia tra le ruote e la cassa.

Le forze laterali che agiscono sui pneumatici infatti non sono incognite in quanto conoscibili attraverso le equazioni costitutive del pneumatico, mentre quelle longitudinali, anch'esse incognite a priori, sono ottenibili attraverso altre 4 equazioni "aggiuntive di equilibrio".

In particolare, le 4 equazioni in esame impongono l'equilibrio della ruota intorno ad un particolare asse che è l'asse ruota.

L'uguaglianza quindi impone che la componente del momento \mathbf{M}_{cij} che cassa e ruota si scambiano lungo l'asse di rotazione, sia proprio la coppia che proviene dai semiassi di trasmissione o dalle pinze dei freni. Matematicamente sono strutturate in questo modo:

$$\mathbf{M}_{cij} \cdot \mathbf{j}_{ij} = -C_{ij} \quad (2.79)$$

dove C_{ij} è la coppia motrice (se positiva) / frenante (se negativa) erogata sulla ruota ij .

Procedendo ancora una volta con la linearizzazione, il risultato è la scrittura di 4 equazioni del tipo:

$$M_{yij} - F_{xij} \cdot R_{ij} + M_{zij} \cdot (\gamma_{ij} + \phi) = -C_{ij} \quad (2.80)$$

Considerando che le forze longitudinali F_{xij} sono state considerate incognite, è necessario aggiungere a tutte le equazioni del sistema anche quelle appena scritte.

Il motivo per cui sono incognite deriva dal fatto che le ruote sono prive di inerzia e che quindi non è possibile avere una lettura sulla loro velocità angolare per il calcolo degli scorrimenti. Di conseguenza non si possono usare le equazioni costitutive dei pneumatici per il calcolo delle forze longitudinali.

Ecco che le forze longitudinali dovranno essere ricavate dalle equazioni scritte, che quindi non apportano nessuna informazione aggiuntiva per la risoluzione del sistema.

Il conteggio di incognite ed equazioni prevede quindi 34 equazioni e 38 incognite. Lo sbilanciamento tra numero di incognite e numero di equazioni non è dunque cambiato. Aggiungendo infatti le 4 equazioni, si sono di fatto aggiunte anche 4 incognite.

All'appello quindi mancano ancora 4 equazioni per poter risolvere il sistema in esame, che devono necessariamente essere rappresentate dalle equazioni costitutive delle sospensioni.

A questo proposito è necessario aprire una non breve parentesi.

Le equazioni costitutive delle sospensioni sono di tipo scalare.

La loro origine passa attraverso la scrittura del Principio dei Lavori Virtuali, che impone un'uguaglianza tra il lavoro fatto sul portamozzo dalle azioni provenienti dalla ruota e il lavoro inglobato negli elementi elastici e smorzanti della sospensione.

È necessario quindi analizzare entrambi i termini.

- Lavoro virtuale delle azioni esterne

Il lavoro virtuale fatto dalle azioni agenti sul portamozzo non si limita al prodotto tra la forza verticale agente nel centro ruota e lo spostamento virtuale in direzione verticale del punto stesso.

In generale, le sospensioni sono sistemi che, relativamente alla cassa del veicolo, hanno un grado di libertà prevalentemente di tipo verticale.

Durante l'escursione della sospensione però, il portamozzo assume ulteriori spostamenti e rotazioni, diversi dal semplice moto verticale.

L'obiettivo delle architetture sospensive è quello di limitare tali grandezze o di governarle in modo opportuno.

I moti addizionali che caratterizzano una sospensione comportano comunque l'introduzione di lavoro da parte di tutte le componenti diverse dalla semplice forza verticale. Per queste ragioni, almeno in via teorica, è necessario considerare tutte le 6 componenti di forza e momento.

Per portare avanti una trattazione del tutto generale, si consideri l'assale anteriore comprensivo di sistema di sterzo.

Il sistema preso in esame ha 3 gradi di libertà, rappresentati dalle posizioni verticali dei due centri ruota nel riferimento cassa e dall'angolo di sterzo del volante.

A questo punto si può scrivere il lavoro virtuale risultante di tutte le azioni esterne.

$$\delta L = \mathbf{F}_{c11} \cdot \delta \mathbf{s}_{c11} + \mathbf{M}_{c11} \cdot \delta \boldsymbol{\Theta}_{11} + \mathbf{F}_{c12} \cdot \delta \mathbf{s}_{c12} + \mathbf{M}_{c12} \cdot \delta \boldsymbol{\Theta}_{12} + \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{v} \quad (2.81)$$

Con $\delta \mathbf{s}_{c11}$ si è indicato lo spostamento virtuale del centro ruota, che in generale ha 3 componenti, mentre con $\delta \boldsymbol{\Theta}_{11}$ la rotazione virtuale del portamozzo, anch'essa dotata di 3 componenti, quindi scrivibile come vettore in quanto infinitesima. Un analogo discorso vale per il centro ruota C12, mentre per il sistema di sterzo, \mathbf{T} e $\delta \mathbf{v}$ sono rispettivamente la coppia applicata al volante e la rotazione virtuale dello stesso.

A questo punto bisogna esprimere sia gli spostamenti che le rotazioni come funzioni dei gradi di libertà del sistema.

Per la sospensione 11, per esempio, si ottiene:

$$\delta \mathbf{s}_{c11} = \left(\frac{\partial s_{cx11}}{\partial s_{cz11}} \cdot \delta s_{cz11} + \frac{\partial s_{cx11}}{\partial \delta v} \cdot \delta \delta v \right) \cdot \mathbf{i}_c + \left(\frac{\partial s_{cy11}}{\partial s_{cz11}} \cdot \delta s_{cz11} + \frac{\partial s_{cy11}}{\partial \delta v} \cdot \delta \delta v \right) \cdot \mathbf{j}_c + \delta s_{cz11} \cdot \mathbf{k}_c \quad (2.82)$$

Un'analoga espressione si ha per la sospensione 12, scambiando semplicemente gli indici.

Per quanto riguarda invece le rotazioni virtuali, queste possono essere ricavate dal prodotto della velocità angolare istantanea del portamozzo per un intervallo infinitesimo di tempo.

$$\delta \boldsymbol{\Theta}_{ij} = \boldsymbol{\omega}_{ij} \cdot \delta t \quad (2.83)$$

Per ottenere la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ del portamozzo, basta applicare il teorema di composizione delle velocità angolari.

In particolare, secondo la successione di rotazioni che ne definisce l'orientazione rispetto alla cassa:

$$\boldsymbol{\omega}_{ij} = \dot{\delta}_{ij} \mathbf{k}_c + \dot{\gamma}_{ij} \mathbf{i}_{ij}^{\gamma} + \dot{\chi}_{ij} \mathbf{j}_{ij} \quad (2.84)$$

dove con \mathbf{i}_{ij}^{γ} si è indicato l'asse \mathbf{i}_{ij} del mozzo dopo la prima rotazione.

Combinando velocità angolare ed intervallo infinitesimo di tempo, si ottiene la rotazione infinitesima

$$\delta \Theta_{ij} = \delta \delta_{ij} \mathbf{k}_C + \delta \gamma_{ij} \mathbf{i}_{ij}^\gamma + \delta \chi_{ij} \mathbf{j}_{ij} \quad (2.85)$$

Anche in questo caso le rotazioni virtuali devono essere espresse come combinazione lineare delle variazioni delle variabili indipendenti del sistema. Dunque, riferendosi sempre alla sospensione 11:

$$\begin{aligned} \delta \Theta_{11} = & \left(\frac{\partial \delta_{11}}{\partial s_{cz11}} \cdot \delta s_{cz11} + \frac{\partial \delta_{11}}{\partial \delta v} \cdot \delta \delta v \right) \cdot \mathbf{k}_C + \left(\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial s_{cz11}} \cdot \delta s_{cz11} + \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial \delta v} \cdot \delta \delta v \right) \cdot \mathbf{i}_{ij}^\gamma + \\ & \left(\frac{\partial \chi_{11}}{\partial s_{cz11}} \cdot \delta s_{cz11} + \frac{\partial \chi_{11}}{\partial \delta v} \cdot \delta \delta v \right) \cdot \mathbf{j}_{ij} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Per analogia si ricava la rotazione virtuale della sospensione 12.

Per quanto riguarda invece le componenti di forze e momenti agenti nei centri ruota, in base alla notazione usata in precedenza, riferendosi alla sospensione 11, si ha:

$$\mathbf{F}_{c11} = F_{cx11} \mathbf{i}_C + F_{cy11} \mathbf{j}_C + F_{cz11} \mathbf{k}_C \quad (2.87)$$

$$\mathbf{M}_{c11} = M_{cx11} \mathbf{i}_C + M_{cy11} \mathbf{j}_C + M_{cz11} \mathbf{k}_C$$

Analoghe scritture valgono per la sospensione 12.

A questo punto entrano in gioco ipotesi semplificative sull'importanza delle varie derivate parziali. In questa sede si ipotizza l'assenza di dipendenze incrociate tra spostamenti e rotazioni. Gli spostamenti dipenderanno dunque solo dallo spostamento in direzione verticale del centro ruota, mentre le rotazioni solo dalla rotazione del volante.

Quanto appena detto è poi confermato dalle simulazioni riportate successivamente.

Prendendo in considerazione l'aspetto delle traslazioni, gli effetti considerati sono ovviamente quello verticale, ma anche quello laterale, mentre è trascurato quello longitudinale. Nel caso invece delle rotazioni, le dipendenze da considerare sono quelle degli angoli di convergenza e di \square amper al variare dell'angolo di sterzo volante.

A giustificare questo è la disposizione dell'asse di sterzo che praticamente passa per il centro ruota, escludendo quindi una dipendenza di spostamenti longitudinali e laterali dall'angolo di sterzo volante.

Analogo discorso vale per le rotazioni, che a causa della particolare geometria delle sospensioni, sono praticamente indipendenti dallo spostamento verticale del centro ruota.

Svolgendo i prodotti scalari per il calcolo del lavoro virtuale, e linearizzando le espressioni ottenute, si ricava l'espressione finale del lavoro virtuale:

$$\begin{aligned} \delta L = & F_{cx11} \cdot \left(\frac{\partial s_{cx11}}{\partial s_{cz11}} \cdot \delta s_{cz11} \right) + F_{cy11} \cdot \left(\frac{\partial s_{cy11}}{\partial s_{cz11}} \cdot \delta s_{cz11} \right) + F_{cz11} \cdot \delta s_{cz11} + M_{cz11} \cdot \frac{\partial \delta_{11}}{\partial \delta v} \cdot \delta \delta v + \\ & M_{cx11} \cdot \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial \delta v} \cdot \delta \delta v + F_{cx12} \cdot \left(\frac{\partial s_{cx12}}{\partial s_{cz12}} \cdot \delta s_{cz12} \right) + F_{cy12} \cdot \left(\frac{\partial s_{cy12}}{\partial s_{cz12}} \cdot \delta s_{cz12} \right) + \\ & F_{cz12} \cdot \delta s_{cz12} + M_{cz12} \cdot \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \delta v} \cdot \delta \delta v + M_{cx12} \cdot \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \delta v} \cdot \delta \delta v + T \cdot \delta \delta v \end{aligned} \quad (2.88)$$

Mettendo in evidenza gli spostamenti indipendenti, la forma del lavoro virtuale delle azioni esterne è la seguente:

$$\begin{aligned} \delta L = & \left(F_{cx11} \cdot \frac{\partial s_{cx11}}{\partial s_{cz11}} + F_{cy11} \cdot \frac{\partial s_{cy11}}{\partial s_{cz11}} + F_{cz11} \right) \cdot \delta s_{cz11} + \\ & \left(F_{cx12} \cdot \frac{\partial s_{cx12}}{\partial s_{cz12}} + F_{cy12} \cdot \frac{\partial s_{cy12}}{\partial s_{cz12}} + F_{cz12} \right) \cdot \delta s_{cz12} + \\ & \left(M_{cz11} \cdot \frac{\partial \delta_{11}}{\partial \delta v} + M_{cz12} \cdot \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \delta v} + M_{cx11} \cdot \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial \delta v} + M_{cx12} \cdot \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \delta v} + T \right) \cdot \delta \delta v \end{aligned} \quad (2.89)$$

Le simulazioni effettuate in ambiente Matlab attraverso l'algoritmo dettagliatamente riportato nel paragrafo 2.1.3.2, dimostrano come lo spostamento laterale del centro ruota in funzione dell'escursione non sia piccolo e come quindi anche le derivate prime non lo siano, analogamente a quanto accade per la variazione di camber introdotta dalla sterzata del volante. A rafforzare la necessità di non trascurare i suddetti termini, solo le elevate azioni di forza e momento che moltiplicano i gradienti considerati. I prodotti visti infatti introducono un contributo non trascurabile sul lavoro virtuale complessivamente fatto sul portamozzo. Prendendo per esempio in considerazione la forza F_{yij} , durante prove in pista, sono state misurate accelerazioni laterali pari a 1,4 g, dunque le forze laterali applicate ai centri ruota sono dello stesso ordine delle forze verticali. Ecco quindi la necessità di considerare anche gli spostamenti laterali nel moto della sospensione. Analogo ragionamento vale per il contributo della variazione di camber. Per quanto riguarda invece l'aspetto delle forze longitudinali, in realtà si può pensare di trascurare l'effetto di rispettivo

spostamento. L'architettura della sospensione posteriore della ET1 è rappresentata nella successiva immagine.

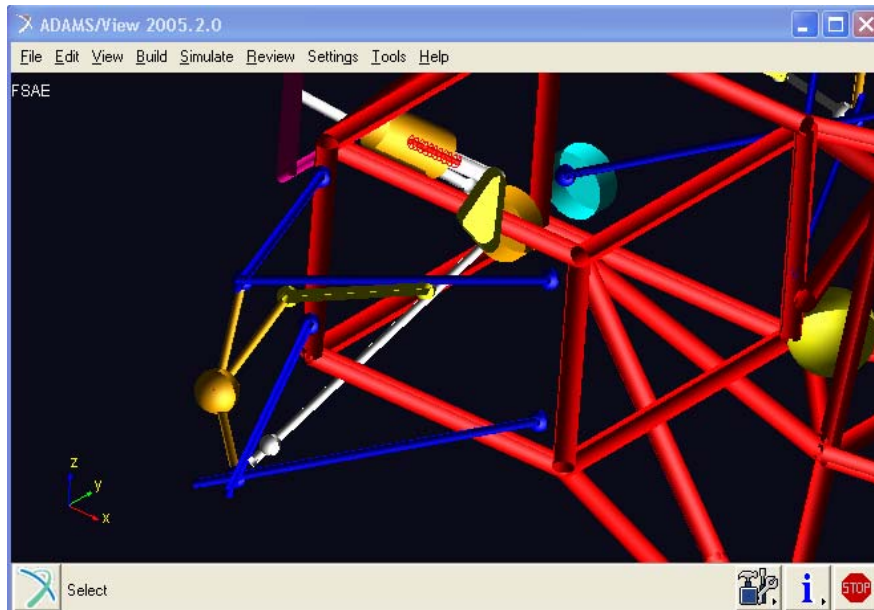


Fig 2.6 – Architettura sospensiva posteriore della ET1

Il gradiente di spostamento longitudinale del centro ruota in funzione di quello verticale è negativo e sufficientemente lineare, ma molto piccolo.

$$\frac{\partial s_{cxij}}{\partial s_{szij}} < 0$$

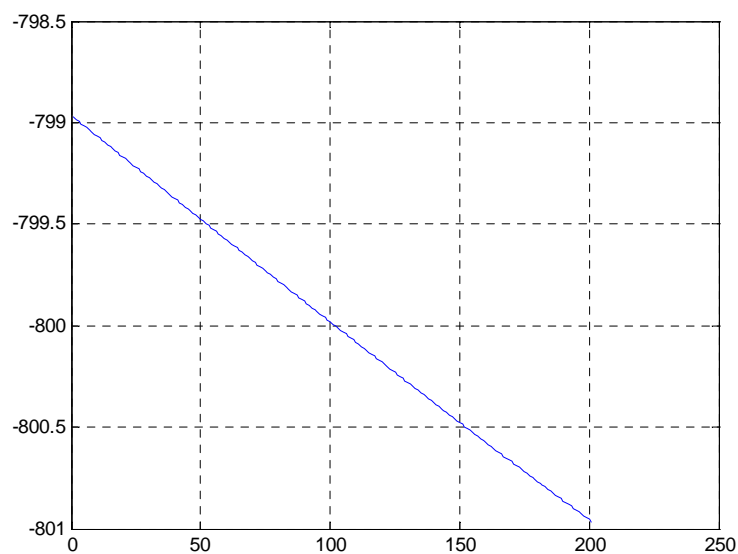


Fig 2.7- Posizione longitudinale del centro ruota nel riferimento cassa

In ascissa sono riportate, in successione, le iterazioni effettuate durante la simulazione. In ordinata la posizione longitudinale in mm del centro ruota nel riferimento cassa.

L'iterazione iniziale corrisponde ad una posizione verticale del centro ruota di -100 mm nel riferimento cassa, mentre quella finale corrisponde ad una posizione verticale di $+100\text{ mm}$. Questi valori estremi nella realtà non vengono mai raggiunti. Sono stati scelti solo per scopi "didattici".

La presenza di un gradiente negativo comporta quindi che, in fase di accelerazione longitudinale, il potere che la forza verticale ha di comprimere la sospensione diminuisce per la presenza del termine di cui sopra. Il modulo del gradiente come detto è molto basso.

Il centro ruota subisce infatti uno spostamento longitudinale di 2 mm a fronte di uno verticale di 200 mm , quindi il modulo vale 0.01 .

Considerazioni del tutto analoghe valgono per lo spostamento laterale, ma come detto con conclusioni differenti.

Le immagini ne riportano gli andamenti, sempre in funzione delle iterazioni, quindi da intendersi per posizioni verticali che passano da -100 mm a $+100\text{ mm}$.

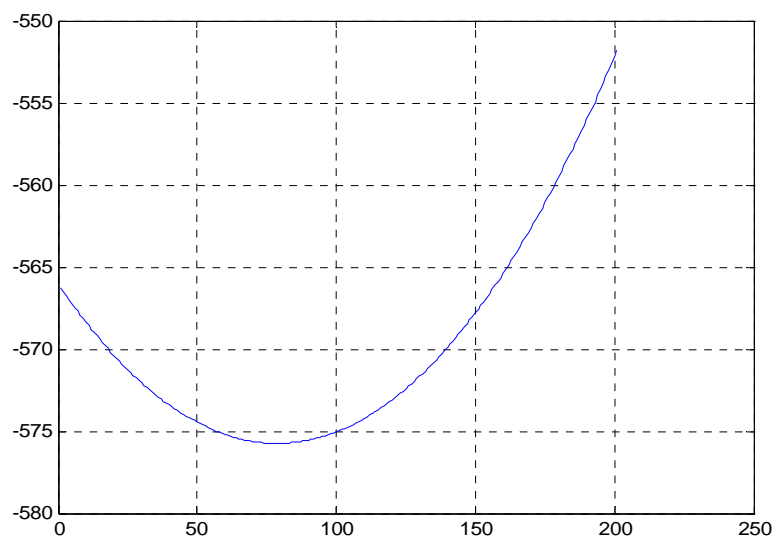


Fig 2.8 - Posizione laterale del centro ruota nel riferimento cassa

Un discorso analogo vale per le rotazioni, che invece possono tutte essere trascurate quando introdotte dal moto verticale del centro ruota. Le immagini ne riportano gli andamenti in funzione dello stesso range di posizioni verticali del centro ruota.

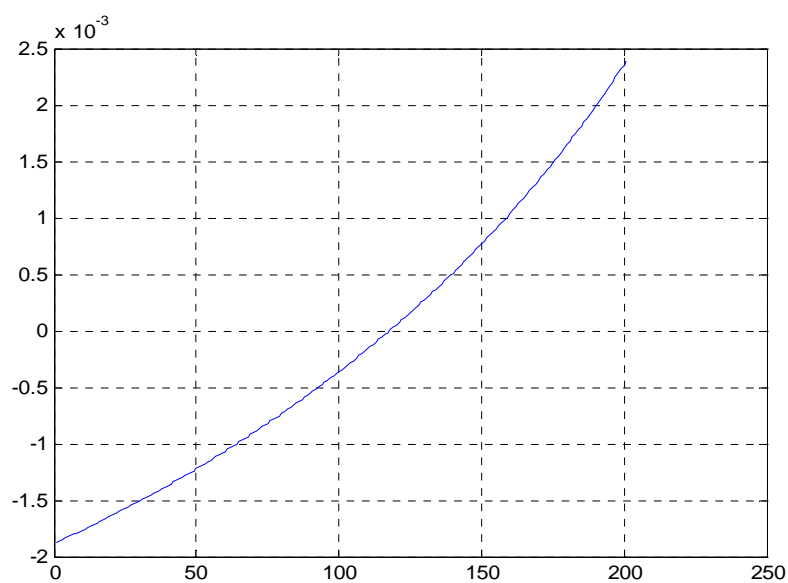


Fig 2.9 – Variazione dell'angolo di convergenza (rad)

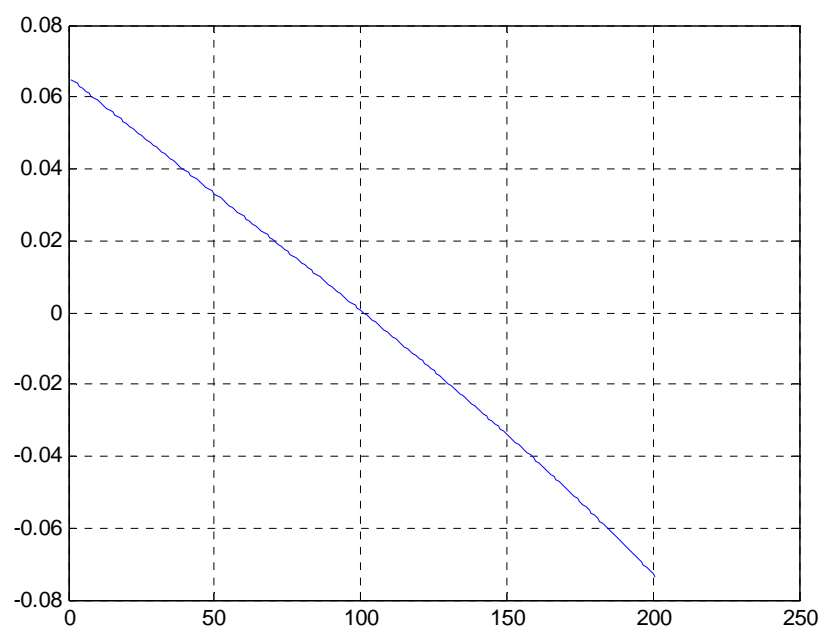


Fig 2.10 – Variazione dell'angolo di camber (rad)

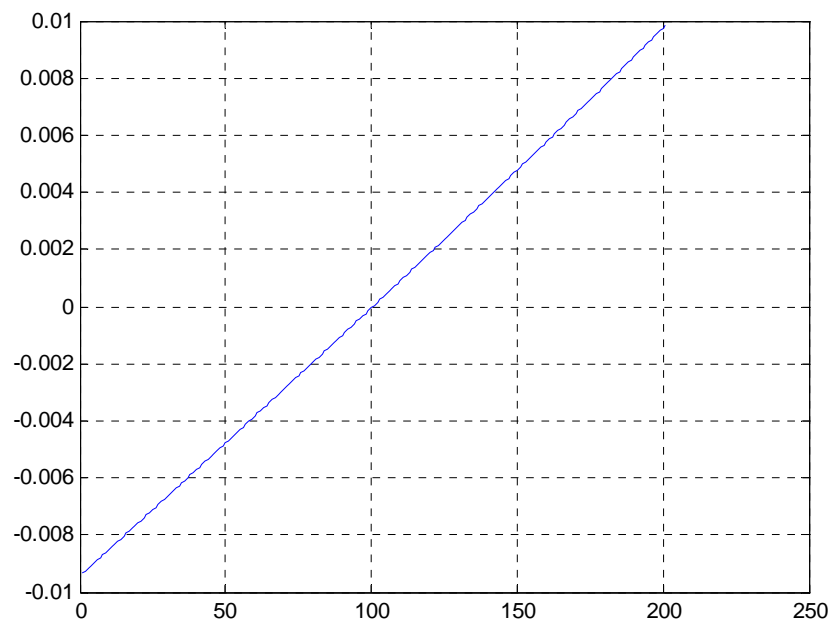


Fig 2.11 – Variazione dell'angolo di incidenza (rad)

Quando invece le rotazioni sono dovute alla rotazione del volante, gli effetti non sono più trascurabili. In particolare rimangono, come detto, i gradienti di convergenza e camber rispetto all'angolo di sterzo.

Sempre attraverso simulazioni in ambiente Matlab, si sono ottenuti gli andamenti degli angoli di convergenza e camber al variare della traslazione laterale della cremagliera.

Come spiegato in seguito, la traslazione della cremagliera è una delle due variabili nella cinematica della sospensione. Attraverso il rapporto di trasmissione della scatola di sterzo si ricostruisce la dipendenza con l'angolo di sterzo volante. Gli andamenti che si ottengono mostrano una notevole linearità degli angoli con la traslazione della cremagliera, dunque con la rotazione del volante.

I gradienti cercati quindi sono anche costanti al variare del punto in cui vengono calcolati.

L'immagine a pagina successiva visualizza quanto detto, nel caso di posizione verticale del centro ruota nulla.

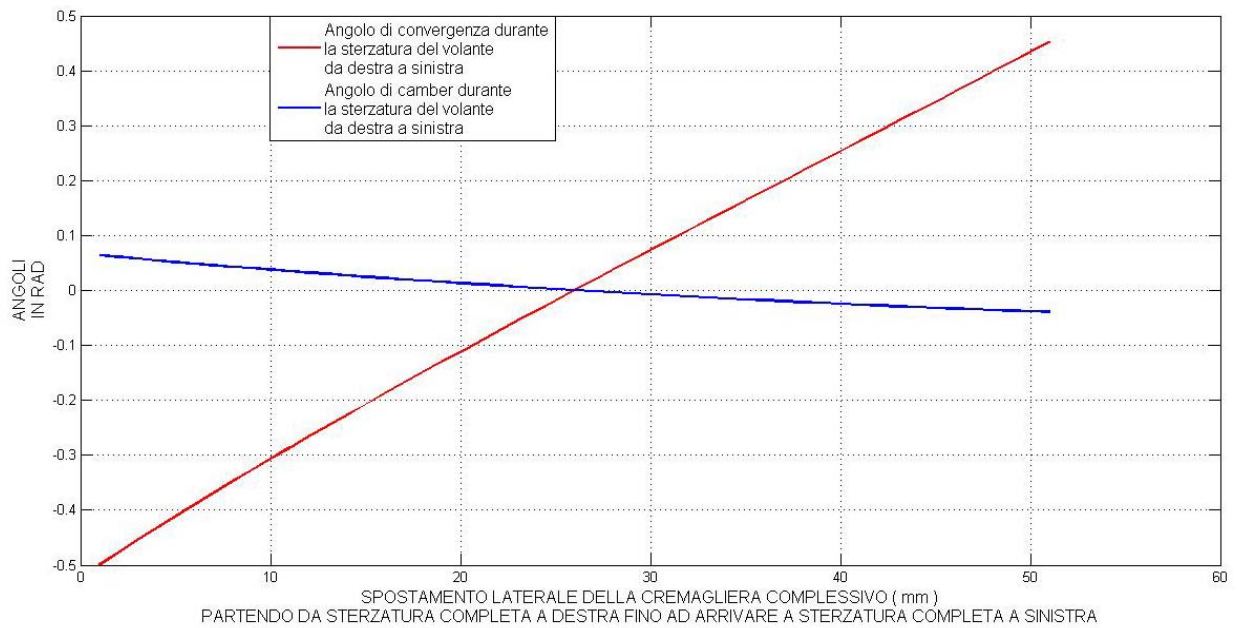


Fig 2.12 – Variazione degli angoli di camber e convergenza a partire da cremagliera completamente spostata a destra, fino ad arrivare a cremagliera totalmente spostata a sinistra

Facendo gli opportuni calcoli e considerando che sulla cremagliera una rotazione massima del volante (110°) comporta una traslazione di 23 mm , (rendendo quindi noto il rapporto di trasmissione vigente sulla scatola di sterzo), i valori delle derivate parziali, nel caso di sospensione anteriore destra valgono:

$$\frac{\partial \delta_{12}}{\partial \delta v} = +0.228$$

$$\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \delta v} = -0.024$$

Per la sospensione 11, grazie alla proprietà di simmetria, le curve devono essere ribaltate su entrambi gli assi, per rimanere quindi praticamente le stesse, a causa della notevole linearità. I valori quindi calcolati sono applicabili ad entrambe le sospensioni.

Dalle considerazioni fatte quindi, la forma finale dell'espressione del lavoro virtuale fatto dalle azioni esterne è la seguente:

$$\delta L = \left(F_{cy11} \cdot \frac{\partial s_{cy11}}{\partial s_{cz11}} + F_{cz11} \right) \cdot \delta s_{cz11} + \left(F_{cy12} \cdot \frac{\partial s_{cy12}}{\partial s_{cz12}} + F_{cz12} \right) \cdot \delta s_{cz12} +$$

$$\left(M_{cz11} \cdot \frac{\partial \delta_{11}}{\partial \delta v} + M_{cz12} \cdot \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \delta v} + M_{cx11} \cdot \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial \delta v} + M_{cx12} \cdot \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \delta v} + T \right) \cdot \delta \delta v$$

(2.90)

Qualora si volessero considerare tutti i contributi, non è a priori da escludere che la combinazione lineare dei gradienti attraverso le azioni, dia un risultato nullo, lasciando quindi sopravvivere solo il termine verticale, per quanto riguarda il comportamento della sospensione singola.

Dalle immagini riportate infatti i gradienti degli spostamenti dipendenti sono alternativamente positivi e negativi, e combinati con opportuni coefficienti sicuramente possono dare un risultato nullo, lasciando sopravvivere solo il termine F_{czj} per il relativo spostamento verticale. I coefficienti sono definiti dalla dinamica del veicolo, quindi a priori incogniti. Ovviamente si tratta di una condizione del tutto particolare. Per concludere quindi, i contributi che vengono presi in esame nell'espressione del lavoro virtuale delle azioni esterne sono le forze verticali e quelle laterali, tralasciando quelle longitudinali, per la formulazione delle equazioni costitutive della sospensione, mentre i momenti verticali e longitudinali, tralasciando quelli laterali per l'equilibrio del sistema di sterzo.

Con riferimento alle equazioni costitutive delle sospensioni, tralasciare il termine longitudinale significa di fatto avere una percentuale di antisquat nulla.

- Lavoro virtuale degli elementi elastici e smorzanti

Anche per il lavoro virtuale degli elementi sospensivi vale un ragionamento del tutto analogo. Il lavoro virtuale totale compiuto dagli elementi è:

$$\delta \hat{L} = \delta \hat{L}_{11} + \delta \hat{L}_{12} \quad (2.91)$$

con

$$\delta \hat{L}_{11} = \mathbf{F}_{elastica11} \cdot \delta \mathbf{s}_{molla11} + \mathbf{F}_{vis \cos a11} \cdot \delta \mathbf{s}_{smorzatore11}$$

(2.92)

$$\delta \hat{L}_{12} = \mathbf{F}_{elastica12} \cdot \delta \mathbf{s}_{molla12} + \mathbf{F}_{vis \cos a12} \cdot \delta \mathbf{s}_{smorzatore12}$$

Scegliendo di nuovo come gradi di libertà gli spostamenti verticali dei centri ruota, si possono ricavare gli spostamenti virtuali della molla e dello smorzatore per entrambe le sospensioni, in funzione degli spostamenti indipendenti.

$$\delta s_{molla11} = \frac{\partial s_{molla11}}{\partial s_{sz11}} \cdot \delta s_{cz11} \quad (2.93)$$

$$\delta s_{smorzatore11} = \frac{\partial s_{smorzatore11}}{\partial s_{sz11}} \cdot \delta s_{cz11}$$

Analoghe espressioni valgono per la sospensioni 12.

Considerando che le forze e gli spostamenti degli elementi in esame sono sempre paralleli, si ottiene:

$$\delta \hat{L}_{11} = \left(F_{elastical1} \cdot \frac{\partial s_{molla11}}{\partial s_{sz11}} + F_{viscosa11} \cdot \frac{\partial s_{smorzatore11}}{\partial s_{sz11}} \right) \delta s_{cz11} \quad (2.94)$$

$$\delta \hat{L}_{12} = \left(F_{elastical2} \cdot \frac{\partial s_{molla12}}{\partial s_{sz12}} + F_{viscosa12} \cdot \frac{\partial s_{smorzatore12}}{\partial s_{sz12}} \right) \delta s_{cz12}$$

Non rimane quindi che imporre l'uguaglianza a zero della somma dei lavori.

$$\delta L + \delta \hat{L} = 0 \quad (2.95)$$

In entrambe le espressioni dei lavori compaiono gli spostamenti indipendenti. In questo modo nascono 3 equazioni indipendenti che sono:

$$F_{cy11} \cdot \frac{\partial s_{cy11}}{\partial s_{cz11}} + F_{cz11} + F_{elastical1} \cdot \frac{\partial s_{molla11}}{\partial s_{sz11}} + F_{viscosa11} \cdot \frac{\partial s_{smorzatore11}}{\partial s_{sz11}} = 0 \quad (2.96)$$

$$F_{cy12} \cdot \frac{\partial s_{cy12}}{\partial s_{cz12}} + F_{cz12} + F_{elastical2} \cdot \frac{\partial s_{molla12}}{\partial s_{sz12}} + F_{viscosa12} \cdot \frac{\partial s_{smorzatore12}}{\partial s_{sz12}} = 0 \quad (2.97)$$

$$M_{cz11} \cdot \frac{\partial \delta_{11}}{\partial \delta v} + M_{cz12} \cdot \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \delta v} + M_{cx11} \cdot \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial \delta v} + M_{cx12} \cdot \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \delta v} + T = 0 \quad (2.98)$$

Per l'assale anteriore quindi si sono originate 3 equazioni di cui due relative al funzionamento delle sospensioni mentre l'altra relativa al sistema di sterzo. L'ultima consente quindi di calcolare la coppia che arriva al volante in conseguenza di una certa manovra.

Le altre due non sono altro che le equazioni costitutive delle sospensioni per le quali è fornibile anche una forma più compatta. Considerando che i gradienti di spostamento degli elementi sono entrambi negativi, si può dunque scrivere

$$F_{cy11} \cdot \frac{\partial s_{cy11}}{\partial s_{cz11}} + F_{cz11} - F_{e11} - F_{s11} = 0 \quad (2.99)$$

$$F_{cy12} \cdot \frac{\partial s_{cy12}}{\partial s_{cz12}} + F_{cz12} - F_{e12} - F_{s12} = 0$$

Per l'assale posteriore non cambia assolutamente nulla, se non la mancanza dell'equazione che definisce la coppia di sterzo essendo infatti assente un sistema di sterzo. Quello che quindi si ricava per analogia è quanto segue

$$F_{cy21} \cdot \frac{\partial s_{cy21}}{\partial s_{cz21}} + F_{cz21} - F_{e21} - F_{s21} = 0 \quad (2.100)$$

$$F_{cy22} \cdot \frac{\partial s_{cy22}}{\partial s_{cz22}} + F_{cz22} - F_{e22} - F_{s22} = 0$$

Ovviamente F_{ej} e F_{sj} sono le forze elastiche e smorzanti che si misurano a centro ruota. Per costruirle, in un caso si fa riferimento alla vera e propria forza elastica misurata a centro ruota, mentre nell'altro caso è necessario effettuare una misura di forza in funzione della velocità del centro ruota, estendendo il valore di smorzamento misurato su tutto il campo di escursione della sospensione.

In questo modo non si tiene conto della variabilità del coefficiente né in posizione, né in velocità.

Per procedere, viene questa volta utilizzato il Software ADAMS View, per il quale esiste appunto un modello integrale della monoposto.

Il modulo della forza elastica è ovviamente indipendente dalla velocità di escursione del centro ruota. La misura su un campo abbastanza ampio di posizioni verticali del centro ruota nel riferimento cassa è dunque esauriente per l'aspetto della rigidità.

Per ottenere la caratteristica elastica delle sospensioni si sono effettuate simulazioni di salita del centro ruota con moto “sinusoidale”.

Disattivando lo smorzatore, per non sovrapporre l'effetto smorzante a quello elastico, è quindi possibile impostare una misura di forza in funzione della posizione verticale del centro ruota.

Quello che si ricava, per esempio per la sospensione posteriore destra è il seguente andamento.

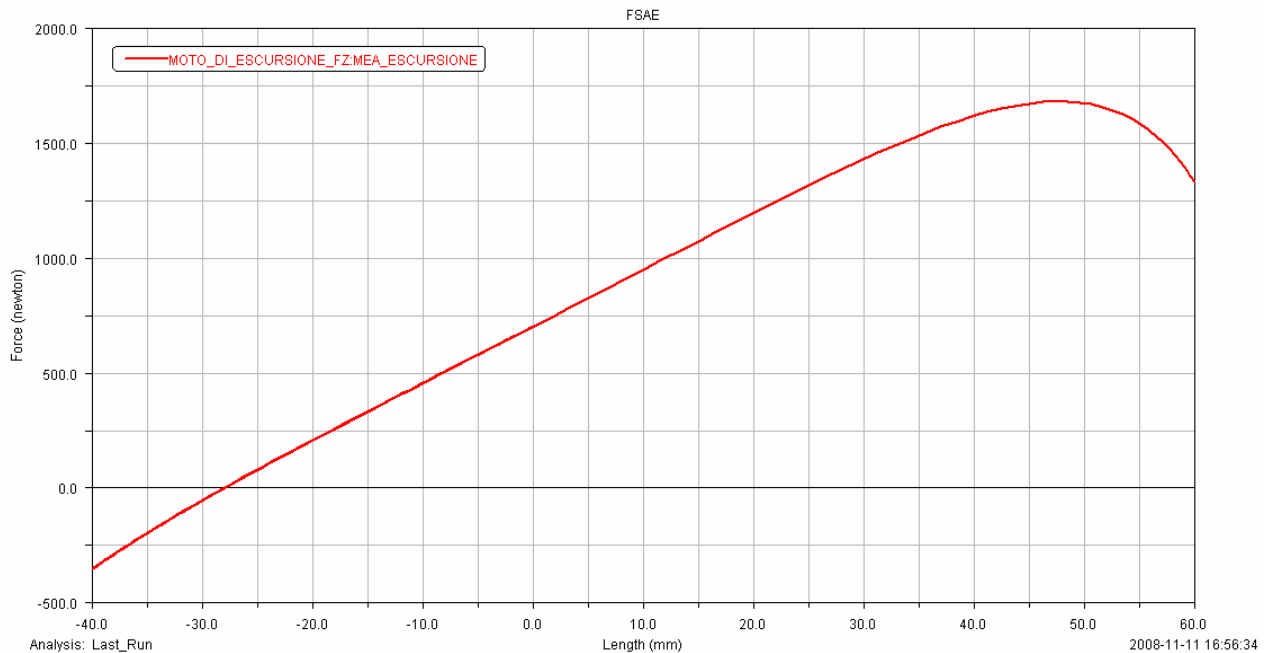


Fig 2.13 – Caratteristica elastica della sospensione posteriore destra

Come si vede, la sospensione della ET1 è molto lineare nel tratto centrale, quello tipico della condizione di equilibrio statica, per poi diventare regressiva nel tratto finale, fino ad assumere addirittura rigidzze negative per valori estremi di escursione.

Con analoghe simulazioni si trovano quelle della sospensione anteriore, per poi applicare considerazioni di perfetta simmetria tra lato sinistro e destro della monoposto.

Per quanto riguarda invece l'aspetto dello smorzamento, è stata fatta una simulazione che prevede di far muovere, in direzione verticale, il centro ruota su tutto il campo di funzionamento della sospensione con una legge di moto che teoricamente può essere qualunque. In questo caso si è imposta una legge di tipo STEP, che impone escursioni graduali tra due posizioni note, con derivate temporali nulle nei punti di inizio e fine del moto.

Al Software è poi richiesto di plottare il modulo della forza verticale in funzione della velocità istantanea.

Quello che si ottiene dalle simulazioni sono i seguenti andamenti.

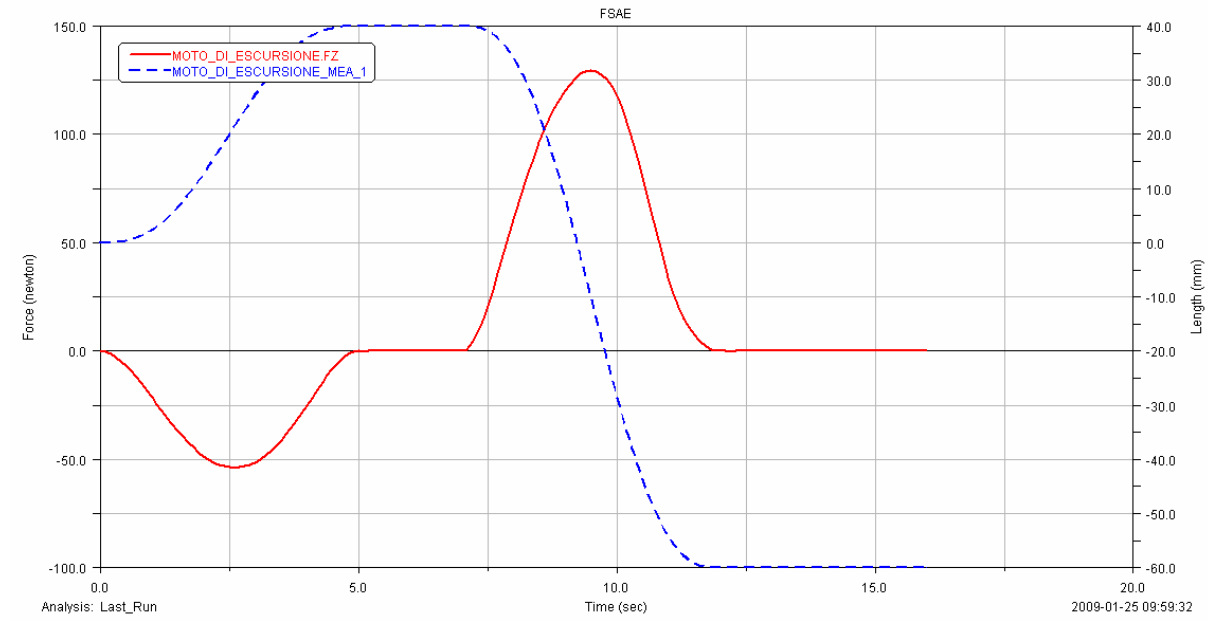


Fig 2.14 – Andamenti di posizione verticale e forza verticale a centro ruota
per la sospensione posteriore destra

Richiedendo al Software l'andamento di forza in funzione della velocità si ottiene

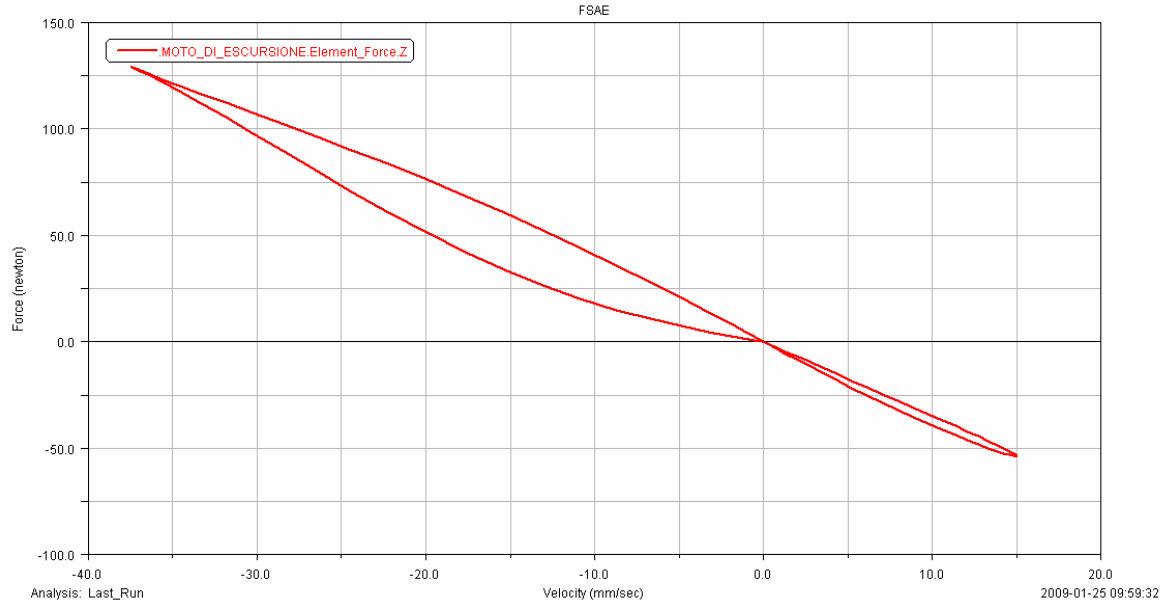


Fig 2.15 – Andamento della forza verticale a centro ruota in funzione
della velocità verticale

Come visibile, la forza raccolta a centro ruota varia col segno della velocità, assumendo valori più bassi in velocità di compressione e più alti in velocità di distensione, come tipicamente richiesto agli elementi smorzanti.

Dal grafico ottenuto è chiaro come non ci sia una forte dipendenza del coefficiente con la velocità, perché il rapporto tra forza e velocità è abbastanza costante con la velocità, non a caso le curve sono posizionate all'incirca sulla stessa retta.

L'ultimo aspetto da trattare è quello delle barre di torsione.

La loro presenza infatti crea un “accoppiamento” tra le posizioni verticali dei centri ruota, inducendo una forza elastica aggiuntiva a centro ruota su una sospensione a causa di una differente posizione dell'altra.

Il contributo elastico quindi sarà dovuto alla sovrapposizione della forza elastica introdotta dalla singola sospensione e da quella introdotta dalla barra di torsione. Quindi, per tutte le sospensioni, si può scrivere

$$F_{eij} = F_{eij_molla} + F_{eij_barra}$$

La forza introdotta dalla barra a sua volta può essere scritta come

$$F_{eij_barra} = K_{CR_barra_i} \cdot (Zc_{ij} - Zc_{ii}) \quad (2.101)$$

Questa relazione infatti può essere estrapolata da analoghe simulazioni durante le quali sono disattivati i gruppi molla – smorzatore e rese attive solo le barre di torsione.

La simulazione prevede che, a partire da una posizione verticale nulla nel riferimento della cassa, entrambi i centri vengano fatti muovere in direzione opposta con la stessa legge temporale. In particolare, si è imposto che la sospensione posteriore sinistra salga, mentre quella destra scenda.

Gli andamenti di forza raccolta a centro ruota sono i seguenti.

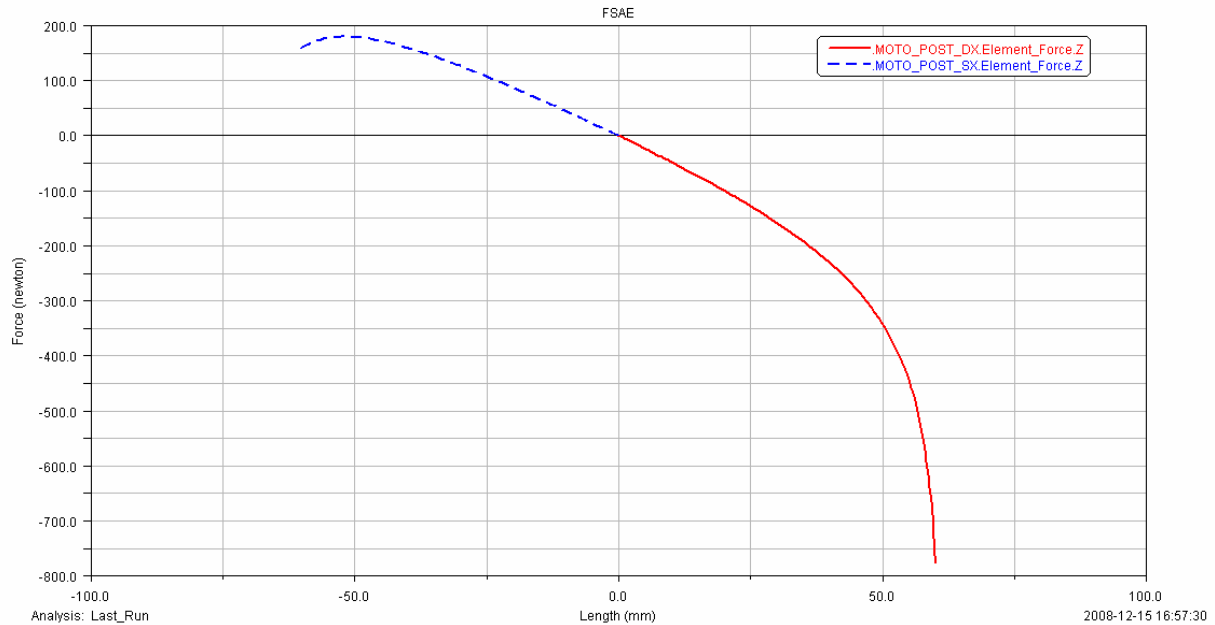


Fig 2.16 – Andamento della forze verticali a centro ruota introdotte dalla barra antirollio

La curva blu a tratteggio è l'andamento della forza verticale posteriore sinistra, mentre la rossa è quella misurata sulla destra.

In ascisse sono riportati gli spostamenti in direzione verticale con segno negativo. Come visibile, per grandi spostamenti, nascono fortissime asimmetrie sulle forze introdotte dalla barra.

Questo è dovuto ad una grande differenza dei rapporti complessivi di leva del sistema di rinvii, tra compressione e distensione.

In particolare, in distensione, per la geometria del cinematismo, il braccio della sospensione tende ad avvicinarsi sempre di più all'asse di incernieramento del rocker, andando quindi a richiedere la nascita di una forza intensa per tenere in equilibrio la di torsione.

Per escursioni che invece rientrano nei normali valori, l'asimmetria si comincia solo a farsi sentire intorno ai $+ 30 \text{ mm}$, $- 30 \text{ mm}$.

In realtà, è necessario precisare che una stessa forbice tra i centri ruota indotta dal moto di rollio, proprio in virtù della forte asimmetria di cui sopra, non crea sempre la stessa variazione di forza al centro ruota.

In questa trattazione l'ipotesi è che il gradiente nell'origine si estenda a qualsiasi altra differenza di posizione verticale, anche se localizzata su ascisse differenti.

Con questo termina la lunga parentesi cominciata16 pagine fa'.

Ecco quindi formulate anche le equazioni costitutive delle sospensioni e del sistema di sterzo, che in realtà esula dal comportamento dinamico del veicolo, essendo solo necessaria per effettuare una lettura di coppia.

Lo sterzo infatti viene controllato in posizione e non in coppia, dunque tale segnale verrà di conseguenza in base alla manovra effettuata.

Riallacciandosi adesso al conteggio delle equazioni disponibili per la risoluzione del sistema, la situazione attuale vede finalmente un numero di equazioni pari al numero di incognite.

Il sistema può essere risolto tramite le usuali tecniche di risoluzione dei sistemi lineari.

Non essendo di interesse la conoscenza delle reazioni vincolari tra cassa e ruote, (o comunque nel caso in cui non le si volessero conoscere) è a questo punto necessario attuare un processo di sostituzione delle incognite tra le varie equazioni per rimanere con un totale di 10 equazioni nelle 10 incognite elencate precedentemente nel vettore \mathbf{x} , eliminando dunque tutte le azioni interne.

In sostanza quindi, il processo prevede di sostituire, nelle prime 10 equazioni scritte, al posto delle componenti delle reazioni tra cassa e ruote (che compaiono tutte perché interessano l'equilibrio della cassa), le espressioni analitiche che invece raccolgono le forze verticali, gli angoli di rollio e beccheggio, i momenti agenti sulle ruote, le coppie di ingresso agenti sulle ruote e quanto altro di diverso dalle reazioni interne.

Per attuare questo processo devono ovviamente essere usate le altre 28 equazioni a disposizione, che a questo punto diventano “ausiliarie ” per il sistema di equazioni.

Il processo, molto laborioso a causa di una notevole complessità analitica delle equazioni e per questo affidato al Software già citato in precedenza, fornisce quindi come risultato le 10 ambite equazioni nelle 10 incognite di interesse.

Si ricorda che il vero vettore delle incognite è rappresentato dall'insieme delle derivate massime delle grandezze non note a priori.

$$\mathbf{x} = \left(\dot{u} \quad \dot{v} \quad \ddot{h} \quad \ddot{\psi} \quad \ddot{\phi} \quad \ddot{\theta} \quad F_{z11} \quad F_{z12} \quad F_{z21} \quad F_{z22} \right)^T$$

Come usualmente accade nei sistemi di equazioni di dimensione n , è molto comodo strutturare tutte le equazioni in una forma particolarmente compatta quale la *Forma Matriciale*.

In questo modo quindi, sono evidenziabili una matrice dei coefficienti ed un vettore degli ingressi, legati dal vettore delle incognite.

La natura del sistema adesso non è più di tipo differenziale, ma di tipo algebrico, perché il vettore delle incognite può essere visto come un insieme di variabili di tipo lineare, indipendentemente dal fatto che in alcune di esse compaia il singolo o il doppio punto di derivazione rispetto al tempo.

Con questa struttura, la semplice inversione della matrice dei coefficienti e la successiva moltiplicazione con il vettore degli ingressi, fornisce istante per istante il vettore delle incognite, dunque il valore delle grandezze da conoscere, la cui successiva integrazione temporale consente di ottenere gli andamenti di tutte le grandezze di ordine di derivazione inferiore.

Il processo di integrazione infatti, non solo è necessario per poter risalire all'andamento della grandezza con ordine di derivazione inferiore, ma serve di fatto ad avere la nuova matrice dei coefficienti ed il nuovo vettore degli ingressi al passo successivo, perché questi dipendono dalle grandezze con ordine di derivazione inferiore rispetto a quelle prese come incognite.

Il processo di ottenimento della forma matriciale è anche in questo caso affidato al Software, per analoghi motivi di complessità analitica.

L'obiettivo è quello elaborare i termini a sinistra e a destra dell'uguale, ovvero i termini inerziali (o "semi-inerziali") e quelli non inerziali, in modo da originare una matrice dei coefficienti \mathbf{A} e un vettore degli ingressi \mathbf{b} che, nelle incognite volute, diano vita ad un sistema algebrico lineare a coefficienti variabili, con vettore dei termini noti anch'esso variabile.

Il processo di manipolazione delle 10 equazioni ottenute, nelle incognite viste, fornisce finalmente la matrice e il vettore cercati.

In particolare, la matrice dei coefficienti, quadrata di dimensione 10, è strutturata nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & \theta & \theta & \theta \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi & -\phi & -\phi & -\phi \\ m\theta & -m\phi & m & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & I_{cxz} - I_{cxx}\theta & I_{cxx} & 0 & -t_1 - R_1\gamma_{11} - h\phi & t_1 - R_1\gamma_{12} - h\phi & -t_2 - R_2\gamma_{21} - h\phi & t_2 - R_2\gamma_{22} - h\phi \\ 0 & 0 & 0 & I_{cyy}\phi & 0 & I_{cyy} & a_1 + (-h + R_1)\theta & a_1 + (-h + R_1)\theta & -a_2 - h\theta + R_2\theta & -a_2 - h\theta + R_2\theta \\ 0 & 0 & 0 & I_{czz} - I_{cxz}\theta & I_{cxz} & 0 & -t_1\theta - a_1\phi & t_1\theta - a_1\phi & -t_2\theta + a_2\phi & t_2\theta + a_2\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + dy_{11}\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + dy_{12}\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + dy_{21}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + dy_{22}\phi \end{pmatrix}$$

Fig 2.17 - Matrice dei coefficienti del modello di veicolo senza inerzia delle ruote

Come visibile, la matrice dei coefficienti non è costante, ma dipende da grandezze direttamente legate alle incognite attraverso un processo di integrazione doppia oltre che alla cinematica delle sospensioni e a caratteristiche geometriche della monoposto.

Per quanto riguarda invece il vettore degli ingressi, la sua struttura analitica è molto complessa ed elaborata, dunque non è stata riportata per motivi di spazio. Ovviamente è fornibile la sua più semplice forma.

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7 \quad b_8 \quad b_9 \quad b_{10}]^T$$

Anche in questo caso si è di fronte ad un vettore che non è costituito da componenti costanti, bensì da termini variabili nel tempo direttamente legati alle incognite, attraverso un processo di integrazione sia doppia che singola.

La risoluzione del sistema è allora facilmente ottenibile dalle normali tecniche di risoluzione dei sistemi lineari, ovvero eseguendo il prodotto, tra l'inversa della matrice dei coefficienti e il vettore degli ingressi.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (2.102)$$

A questo punto il vettore delle incognite può essere integrato. L'integrazione deve interessare chiaramente solo alcune componenti, escludendo quindi dalla prima integrazione le componenti 7, 8, 9, 10, ed escludendo successivamente dalla seconda integrazione le componenti 1 e 2.

$$x = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \ddot{h} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{\theta} \\ Fz11 \\ Fz12 \\ Fz21 \\ Fz22 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ \dot{h} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h \\ \psi \\ \Phi \\ \theta \end{pmatrix}$$

Il processo di integrazione appena descritto serve quindi per l'aggiornamento sia della matrice A che del vettore b per lo step successivo.

Ecco quindi che si è giunti alla struttura matematica del sistema che governa la dinamica del veicolo nel caso in cui si trascuri l'inerzia delle ruote e dopo un particolare processo di linearizzazione di tutte le equazioni nell'intorno di un vettore nullo, formato da grandezze il cui valore è approssimabile a zero.

L'ultima precisazione riguarda il già citato sistema di sterzo. Si è vista la struttura dell'equazione che consente di determinare la coppia allo sterzo.

$$M_{cz11} \cdot \frac{\partial \delta_{11}}{\partial \delta v} + M_{cz12} \cdot \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \delta v} + M_{cx11} \cdot \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial \delta v} + M_{cx12} \cdot \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \delta v} + T = 0 \quad (2.103)$$

A causa dell'elevato numero di componenti che entrano nell'equazione non è riportata la relazione finale nemmeno in questo caso.

2.3.1 Calcolo degli angoli di deriva

L'angolo di deriva che caratterizza un pneumatico durante la cinematica del veicolo è definito come l'angolo compreso tra il vettore velocità del centro di impronta del pneumatico e l'intersezione tra piano medio della ruota e piano stradale. Vista la particolare rigidità ai moti di beccheggio e rollio della cassa del veicolo (assenza di spostamenti dei punti di contatto a terra nel riferimento ausiliario), e considerati i riferimenti effettivamente utilizzati per lo studio cinematica della monoposto, in questa sede è plausibile utilizzare le espressioni tipiche del modello piano di veicolo. Per il calcolo degli angoli di deriva, basta quindi riferirsi alle seguenti espressioni.

- Angolo di deriva della ruota anteriore sinistra:

$$\alpha_{11} = \delta_{11} - \arctan \frac{\dot{\psi} a + v}{u - t_1 \dot{\psi}}$$

- Angolo di deriva della ruota anteriore destra:

$$\alpha_{12} = \delta_{12} - \arctan \frac{\dot{\psi} a + v}{u + t_1 \dot{\psi}}$$

- Angolo di deriva della ruota posteriore sinistra:

$$\alpha_{21} = \delta_{21} - \arctan \frac{v - \dot{\psi} b}{u - t_2 \dot{\psi}}$$

- Angolo di deriva della ruota posteriore destra:

$$\alpha_{22} = \delta_{22} - \arctan \frac{v - \dot{\psi} b}{u + t_2 \dot{\psi}}$$

(2.104)

Anche per le ruote posteriori si è considerato l'angolo di sterzo a terra perché sarà ricavabile dalla cinematica delle sospensioni, come spiegato nel paragrafo successivo.

2.3.2 Calcolo degli angoli di sterzo e camber relativi

Il vettore degli ingressi e la matrice dei coefficienti come visto sono variabili nel tempo, in quanto composti da termini che cambiano in base alla soluzione istantanea del sistema, ma anche in base alle grandezze di input che provengono dal pilota.

Ad esempio, la matrice A è una funzione di 7 grandezze, di cui 3 associate direttamente al moto del veicolo, mentre 4 associate, oltre che al moto del veicolo anche all'entità dell'angolo di sterzo del volante. Infatti:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta, \phi, h, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22})$$

Analogamente, il vettore degli ingressi è funzione di un numero ancora più grande di variabili:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\theta, \phi, h, \dots, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22})$$

Le grandezze relative alle sospensioni, ovvero gli angoli γ_{ij} e i δ_{ij} dipendono sia dall'escursione della sospensione (ricavabile dalle variabili θ , Φ e h), ma anche dall'angolo di sterzo volante. Sono quindi grandezze che istante per istante cambiano sia in base al moto del veicolo che agli ingressi che il pilota attua.

Ecco quindi che il funzionamento della sospensione deve essere studiato in tutti i suoi dettagli, ai fini di poter sempre fornire un valore istantaneo agli angoli di sterzo e di camber delle ruote relativi alla cassa durante le simulazioni.

Il discorso si semplifica nel caso delle sospensioni posteriori, perché non essendo presente un sistema di sterzo, le stesse grandezze sono questa volta solo funzione delle escursioni delle sospensioni.

Ecco quindi che per l'assale anteriore valgono relazioni costitutive degli angoli in esame di questo tipo

$$\delta_{11} = \delta_{11}(Z_{c11}, \delta_v)$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{11}(Z_{c11}, \delta_v)$$

$$\delta_{12} = \delta_{12}(Z_{c12}, \delta_v)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{12}(Z_{c12}, \delta_v)$$

Mentre per quello posteriore

$$\delta_{21} = \delta_{21}(Z_{c21})$$

$$\gamma_{21} = \gamma_{21}(Z_{c21})$$

$$\delta_{22} = \delta_{22}(Z_{c22})$$

$$\gamma_{22} = \gamma_{22}(Z_{c22})$$

La risoluzione della cinematica delle sospensioni potrebbe passare dallo studio del modello ADAMS disponibile per la stessa vettura.

La relativa variabilità del posizionamento di punti di attacco dei braccetti delle sospensioni e della lunghezza degli stessi in fase di progettazione, ha suggerito un metodo di risoluzione diverso.

Nell'ipotesi di trascurabilità delle deformazioni elastiche distribuite sui braccetti e localizzate nei loro punti di attacco al telaio, il sistema sospensione diventa un cinematismo rigido per il quale devono valere equazioni che esprimano la congruenza sulle posizioni delle cerniere. Ecco quindi che per il calcolo degli angoli di convergenza e camber relativi alla cassa, la metodologia da adottare è quella di scrivere le equazioni di congruenza della sospensione attraverso l'uso di due sistemi di riferimento opportuni. La tipologia di sospensione che viene montata sulle Formula SAE è, per motivi di spazio, una sospensione a quadrilatero. Il quadrilatero è un caso particolare della sospensione Multilink che, come noto, è un cinematismo ad un solo grado di libertà. Il procedimento risolutivo punta quindi a scrivere le equazioni di congruenza della sospensione Multilink per poi far coincidere, a due a due, in un unico punto, due differenti attacchi tra braccetti e portamozzo, originando quindi i punti di attacco dei triangoli al portamozzo. Per far questo sono necessari due sistemi di riferimento.

Il primo è quello solidale alla cassa del veicolo, già usato per la stesura delle equazioni di equilibrio, mentre il secondo deve essere preso solidale al portamozzo. L'unico accorgimento cui prestare attenzione è quello di scegliere il sistema di riferimento appena citato in modo che l'asse y sia coincidente con l'asse del mozzo ruota.

I restanti devono essere presi in modo da dar vita ad una terna levogira.

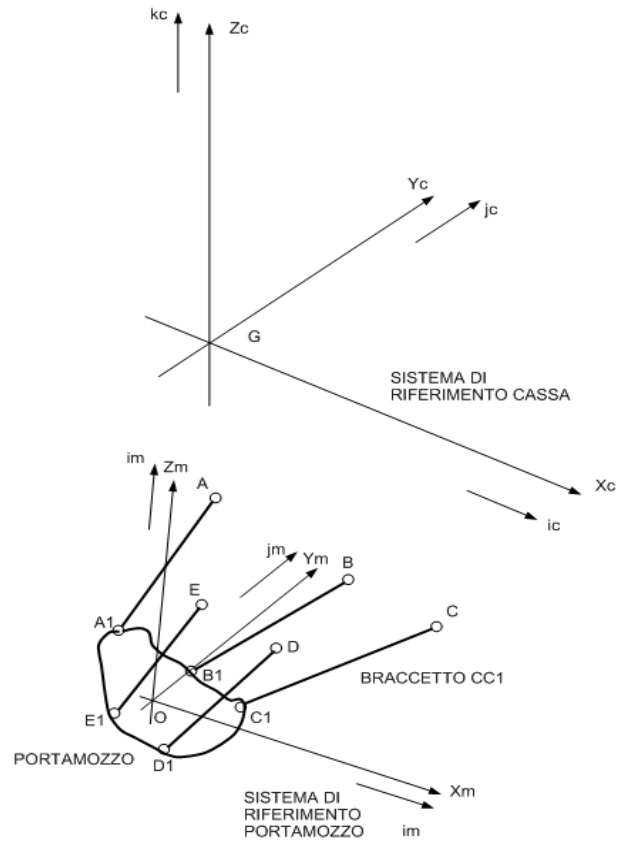


Fig 2.18 - Schema di riferimento della geometria della sospensione Multilink

Il passo successivo è quello di conoscere la posizione delle cerniere fisse nel sistema di riferimento della cassa e di quelle “mobili” nel sistema di riferimento del mozzo (che ovviamente in tale riferimento sono fisse).

Proprio in virtù della variabilità delle posizioni in esame, quello che conviene fare è esplicitarle come parametri.

Nominando con A, B, C, D ed E i punti che definiscono gli attacchi dei braccetti al telaio del veicolo, e con A1, B1, C1, D1 ed E1 quelli che invece definiscono i punti di attacco degli stessi al portamozzo, sono allora indicabili le posizioni delle cerniere nei sistemi di riferimento prima citati.

In forma vettoriale quindi, nel caso delle cerniere fisse si può scrivere:

$$\mathbf{r}_A = x_A \mathbf{i}_C + y_A \mathbf{j}_C + z_A \mathbf{k}_C$$

$$\mathbf{r}_B = x_B \mathbf{i}_C + y_B \mathbf{j}_C + z_B \mathbf{k}_C$$

$$\mathbf{r}_C = x_C \mathbf{i}_C + y_C \mathbf{j}_C + z_C \mathbf{k}_C$$

$$\mathbf{r}_D = x_D \mathbf{i}_C + y_D \mathbf{j}_C + z_D \mathbf{k}_C$$

$$\mathbf{r}_E = x_E \mathbf{i}_C + y_E \mathbf{j}_C + z_E \mathbf{k}_C$$

(2.105)

Equazioni del tutto analoghe valgono per le cerniere del portamozzo, nel suo riferimento. Indicando con O l'origine del riferimento in questione, si può scrivere:

$$\mathbf{OA1} = x_{A1} \mathbf{i}_m + y_{A1} \mathbf{j}_m + z_{A1} \mathbf{k}_m$$

$$\mathbf{OB1} = x_{B1} \mathbf{i}_m + y_{B1} \mathbf{j}_m + z_{B1} \mathbf{k}_m$$

$$\mathbf{OC1} = x_{C1} \mathbf{i}_m + y_{C1} \mathbf{j}_m + z_{C1} \mathbf{k}_m$$

$$\mathbf{OD1} = x_{D1} \mathbf{i}_m + y_{D1} \mathbf{j}_m + z_{D1} \mathbf{k}_m$$

$$\mathbf{OE1} = x_{E1} \mathbf{i}_m + y_{E1} \mathbf{j}_m + z_{E1} \mathbf{k}_m$$

(2.106)

I braccetti della sospensione a questo punto non sono altro che i segmenti **AA1**, **BB1**, **CC1**, **DD1**, **EE1**.

Ovviamente anche questi, oltre ad avere una propria lunghezza, hanno anche una generica orientazione definibile rispetto al sistema di riferimento della cassa con due angoli.

Prendendo come elemento di esempio il braccetto *AA1*, la prima rotazione serve per portarlo da una disposizione inizialmente longitudinale (ovvero braccetto diretto come l'asse x del veicolo) ad una più generica disposizione nel piano xy della cassa. La seconda rotazione invece serve per creare un dislivello tra i punti A ed A' in direzione z . Gli angoli che caratterizzano le rotazioni nel caso in esame sono θ_1 e θ_2 .

In figura sottostante è riportato quanto detto.

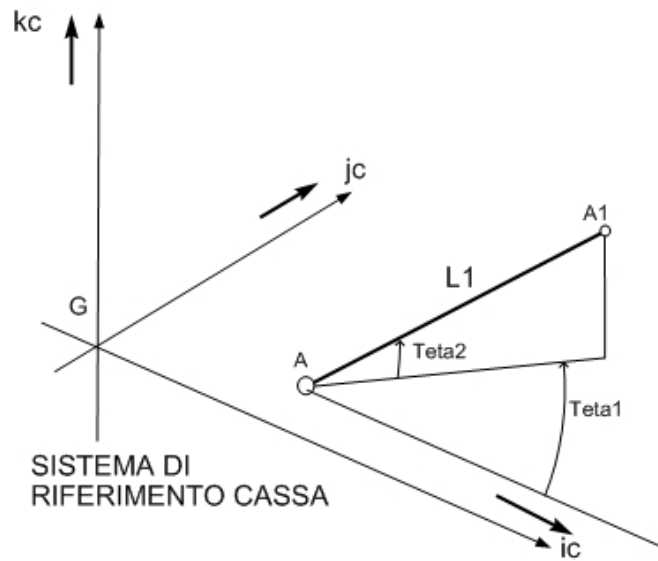


Fig 2.19 – Generica disposizione del braccetto AA1 nel riferimento cassa

Un discorso del tutto analogo vale per i restanti 4 braccetti, e gli angoli che caratterizzano le rotazioni sono nominati in progressione $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_9, \theta_{10}$.

Con questa convenzione allora sono scrivibili i vettori che identificano i braccetti della sospensione

$$\mathbf{AA1} = L_1 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 \mathbf{i}_C + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \mathbf{j}_C + \sin \theta_2 \mathbf{k}_C]$$

$$\mathbf{BB1} = L_2 [\cos \theta_3 \cos \theta_4 \mathbf{i}_C + \sin \theta_3 \cos \theta_4 \mathbf{j}_C + \sin \theta_4 \mathbf{k}_C]$$

$$\mathbf{CC1} = L_3 [\cos \theta_5 \cos \theta_6 \mathbf{i}_C + \sin \theta_5 \cos \theta_6 \mathbf{j}_C + \sin \theta_6 \mathbf{k}_C]$$

$$\mathbf{DD1} = L_4 [\cos \theta_7 \cos \theta_8 \mathbf{i}_C + \sin \theta_7 \cos \theta_8 \mathbf{j}_C + \sin \theta_8 \mathbf{k}_C]$$

$$\mathbf{EE1} = L_5 [\cos \theta_9 \cos \theta_{10} \mathbf{i}_C + \sin \theta_9 \cos \theta_{10} \mathbf{j}_C + \sin \theta_{10} \mathbf{k}_C]$$

(2.107)

In ultimo deve essere scritta la posizione dell'origine del sistema di riferimento del portamozzo nel sistema di riferimento della cassa:

$$\mathbf{GO} = x_o \mathbf{i}_C + y_o \mathbf{j}_C + z_o \mathbf{k}_C \quad (2.108)$$

A questo punto non rimane che scrivere il legame tra l'orientazione dei sistemi di riferimento usati. Facendo riferimento a quanto già scritto a proposito nelle precedenti pagine, la matrice di rotazione risultante è il prodotto delle tre matrici elementari negli angoli δ , γ e χ .

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{32} = \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & \sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \chi & 0 & \cos \chi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{10} \mathbf{A}^{21} \mathbf{A}^{32}$$

Le ultime equazioni da scrivere sono quindi quelle che esprimono il legame tra i versori delle terne, in particolare:

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{A} \mathbf{i}_C$$

$$\mathbf{j}_m = \mathbf{A} \mathbf{j}_C$$

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{A} \mathbf{k}_C$$

Sono quindi adesso disponibili tutte le grandezze per poter scrivere le equazioni di congruenza geometrica del cinematismo, esprimenti di fatto l'unicità dei vettori che identificano, per esempio, le cerniere del telaio del veicolo.

Le equazioni vettoriali sono quindi 5, una per ogni braccetto della Multilink.

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O + \mathbf{OA}' - \mathbf{AA}'$$

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_O + \mathbf{OB}' - \mathbf{BB}'$$

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_O + \mathbf{OC}' - \mathbf{CC}'$$

$$\mathbf{r}_D = \mathbf{r}_O + \mathbf{OD}' - \mathbf{DD}'$$

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{r}_O + \mathbf{OE}' - \mathbf{EE}'$$

(2.109)

Trattandosi di un campo vettoriale di dimensione 3, alle 5 equazioni scritte corrisponde un totale di 15 equazioni scalari.

Il numero di incognite è anch'esso 15, in particolare i 10 angoli che definiscono l'orientazione dei braccetti nel sistema di riferimento della cassa, i 3 angoli che definiscono l'orientazione del mozzo rispetto alla cassa ed infine la posizione longitudinale e laterale dell'origine del sistema solidale al portamozzo, nel caso in cui venga scelta come coordinata indipendente la posizione verticale del centro ruota nel sistema di riferimento della cassa, come fatto finora.

L'interesse in questo caso è la conoscenza delle coordinate Lagrangiane associate al portamozzo, dunque posizioni del centro del sistema di riferimento (che può essere sempre fatto coincidere con il centro ruota) e angoli di orientazione, tralasciando le posizioni angolari dei braccetti.

In realtà, per la funzionalità del modello Simulink di monoposto, anche le posizioni nel piano xy del centro ruota non sono necessarie, avendo infatti ipotizzato costanti sia il passo che la carreggiata.

L'ipotesi infatti è abbastanza lecita perché le variazioni di passo e carreggiata sono trascurabili rispetto ai valori statici.

Contrariamente, la conoscenza degli angoli di convergenza e di camber della ruota relativi alla cassa è importante perché tali grandezze sono dello stesso ordine degli angoli di rollio e di sterzo a terra, dunque non più trascurabili.

L'esplicitazione delle equazioni scalari da vita ad un sistema di 15 equazioni in 15 incognite non lineare in cui è ovviamente definibile un vettore delle incognite \mathbf{x} di cui, in questa sede, interessano solo alcune componenti.

Le prime 3 equazioni, riferite secondo quanto scritto sopra alla cerniera A, sono le seguenti

$$\begin{aligned}
x_A &= x_O - L_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - y_{A1} \cos \gamma \sin \delta + \\
& z_{A1} (\cos \chi \sin \gamma \sin \delta + \cos \delta \sin \chi) + x_{A1} (\cos \delta \cos \chi - \sin \gamma \sin \delta \sin \chi) \\
y_A &= y_O - L_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + y_{A1} \cos \gamma \cos \delta + \\
& x_{A1} (\cos \delta \sin \gamma \sin \chi + \cos \chi \sin \delta) + z_{A1} (\sin \delta \sin \chi - \sin \gamma \cos \delta \cos \chi) \\
z_A &= z_O - L_1 \sin \theta_2 + z_{A1} \cos \gamma \cos \chi + y_{A1} \sin \gamma - x_{A1} \sin \chi \cos \gamma
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Le restanti 12 equazioni sono strutturate in modo esattamente uguale, essendo infatti sufficiente sostituire al posto di A il nome della cerniera cui si riferiscono le equazioni, ad L_1 la lunghezza del braccetto interessato, e agli angoli θ_1 e θ_2 quelli che definiscono l'orientazione del braccetto.

L'insieme delle equazioni evidentemente necessita quindi di metodi di risoluzione iterativi dei sistemi non lineari, come ad esempio il metodo di Newton. Le equazioni scritte infatti possono essere raggruppate in forma compatta nel seguente modo

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{dove } F \text{ è una funzione non lineare ed } \mathbf{x} \text{ il vettore delle incognite.}$$

La struttura del vettore delle incognite è pertanto la seguente:

$$\mathbf{x} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8 \quad \theta_9 \quad \theta_{10} \quad x_O \quad y_O \quad \delta \quad \gamma \quad \chi]^T$$

Il file scritto per la risoluzione del sistema di equazioni è di tipo parametrico sottoforma di *script* di Matlab. Al suo interno vengono infatti definiti i vettori \mathbf{Y} , \mathbf{Z} ed \mathbf{L} .

Il primo raccoglie rispettivamente, in ordine, le posizioni longitudinali laterali e verticali delle cerniere A B C D ed E nel sistema di riferimento cassa.

Dunque,

$$\mathbf{Y} = (x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, x_D, y_D, z_D, x_E, y_E, z_E)$$

Il secondo effettua la stessa cosa per le cerniere del portamozzo nel suo sistema di riferimento.

$$\mathbf{Z} = (x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}, x_{B1}, y_{B1}, z_{B1}, x_{C1}, y_{C1}, z_{C1}, x_{D1}, y_{D1}, z_{D1}, x_{E1}, y_{E1}, z_{E1})$$

Il terzo infine raccoglie, in ordine, le lunghezze dei braccetti della sospensione.

$$\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)$$

Ovviamente, nel caso delle quattro sospensioni della vettura ET1, le componenti del vettore \mathbf{Z} non saranno tutte indipendenti perché sul portamozzo non sono presenti 5 punti di attacco differenti, bensì, come precedentemente detto, 3 a causa della coincidenza della cerniera A1 con la B1, e della D1 con la E1.

All'interno del vettore \mathbf{Y} , ci sarà quindi la ripetizione di due sottovettori di dimensione 3.

Parallelamente allo *script* che definisce l'insieme di equazioni, ce ne deve essere un altro, la cui risoluzione avviene implementando un ciclo iterativo di tipo *for / end* che consente, per ogni posizione verticale del centro ruota (dunque dell'origine del sistema di riferimento del mozzo), di risolvere il sistema non lineare ed ottenere conseguentemente i valori delle grandezze di interesse.

Per distinguere la sospensione anteriore dalla posteriore, la nomenclatura utilizzata per la variabile indipendente, ovvero la posizione verticale del centro ruota, è rispettivamente *sv_ant* e *sv_post*. Ovviamente è necessario, per questo tipo di algoritmi, la stima di un vettore soluzione iniziale in modo da dare un input all'algoritmo ed essere quindi sicuri della convergenza dello stesso alla soluzione effettivamente cercata.

In sostanza quindi, oltre a dover necessariamente inserire all'interno dei files di risoluzione i valori che caratterizzano l'effettiva geometria della sospensione, è anche necessario associare al vettore $\mathbf{x0}$ un valore più vicino, per quanto possibile, al vettore soluzione.

Per far questo, sono necessarie alcune considerazioni sulla cinematica della sospensione.

Il moto "equivalente" della sospensione all'interno dell'algoritmo rimane in ogni caso abbastanza limitato, quindi il vettore $\mathbf{x0}$ da cui far partire il metodo risolutivo può essere facilmente ottenuto prendendo, ad esempio, la configurazione intermedia, ovvero quella associata ad *sv_ant* o (*sv_post*) nulli.

Per costruire il vettore $\mathbf{x0}$ non serve altro che sostituire alle sue componenti, valori prossimi a quelli associati a quella configurazione geometrica.

Ad esempio, nel caso degli angoli di orientazione del sistema di riferimento del portamozzo rispetto a quello della cassa, anche qualora fossero presenti valori statici di camber e convergenza, essendo questi espressi in radianti, è lecito associare alle ultime tre componenti del vettore $\mathbf{x0}$ valori nulli.

Per le componenti 11 e 12, esprimenti rispettivamente posizione longitudinale e laterale del centro ruota nel riferimento della cassa, possono essere sostituiti i valori di semipasso e semicarreggiata statici.

Infine, per le prime 10 componenti del vettore delle incognite è lecito associare agli angoli "pari" valori nulli (infatti gli angoli pari dicono quanto il generico braccetto della sospensione è inclinato

rispetto al piano xy del veicolo), mentre agli angoli “dispari” (che invece dicono di quanto sono ruotati rispetto all’asse longitudinale del veicolo) valori di circa -1 e -2 radianti (corrispondenti a circa -60° e -120°) rispettivamente per i braccetti retrostanti e frontali dei triangoli della sospensione.

Da ricordare infatti che gli angoli di cui si parla sono formati tra i vettori AA_1, \dots, EE_1 e l’asse longitudinale del veicolo.

In effetti, i braccetti frontali e retrostanti del triangolo superiore e inferiore della sospensione, a partire da una posizione inizialmente coincidente con l’asse longitudinale del veicolo, devono essere fatti ruotare orientativamente degli angoli suddetti prima di arrivare ad una posizione sufficientemente vicina a quella caratterizzante la loro tipica disposizione geometrica.

Il passo successivo è quello di trasferire le informazioni di interesse (ovvero le componenti 13 e 14 del vettore soluzione) in Lookup Tables monodimensionali e bidimensionali, rispettivamente per le sospensioni posteriori e anteriori.

Ovviamente il processo di risoluzione può fermarsi allo studio di una sola sospensione per assale. Per l’assale posteriore infatti, il comportamento della sospensione è perfettamente simmetrico tra lato sinistro e destro del veicolo, dunque antisimmetrico nelle grandezze δ e γ .

Nel caso dell’assale anteriore invece il comportamento della sospensione non è simmetrico perché la sterzata introdotta dal volante gioca ruoli differenti sulle due ruote. In realtà è però sufficiente studiare il moto della sospensione al variare dell’escursione e dell’angolo di sterzo volante sull’intero insieme di valori di Z_c e δ_r .

Infatti l’antisimmetria delle grandezze vale quando, a parità di escursione, lo sterzo assume posizioni angolari simmetriche rispetto al piano xz del veicolo. Anche per l’assale anteriore quindi è sufficiente lo studio cinematico di una sola sospensione da farsi ovviamente sull’intero insieme di esistenza delle variabili Z_c e δ_r .

La differenza sostanziale negli algoritmi di risoluzione della sospensione anteriore e posteriore è nel numero di cicli di tipo *for / end*.

Nel caso dell’assale posteriore infatti, è necessario un solo ciclo, agente sull’indice i , che a sua volta si riferisce alla posizione del centro ruota. La risoluzione del sistema di equazioni quindi avviene per ogni indice i , dunque per ogni posizione verticale del centro ruota.

L’algoritmo costruisce automaticamente la matrice che raccoglie le soluzioni per ogni iterazione sull’indice, formata quindi da un numero di colonne (o di righe) pari alla dimensione del vettore delle incognite e da un numero di righe (o di colonne) pari al numero di iterazioni.

Per avere la certezza di risolvere il sistema di equazioni per ogni possibile configurazione geometrica della sospensione derivante dal moto del veicolo, è importante far variare la posizione verticale del centro ruota su un campo abbastanza ampio di valori. In questo modo, anche se le

dimensioni della matrice finale risulteranno eccessive, sicuramente non verranno perse importanti informazioni.

Nel caso invece della sospensione anteriore, il ciclo *for / end* di indice i agisce all'interno di un altro ciclo di indice j che invece fa variare la posizione della cerniera C in direzione y . La cerniera C infatti materializza l'attacco del tirante di sterzo (ovvero del braccetto CC1) alla cremagliera, che ovviamente può traslare in direzione y a causa del moto di rotazione del volante. Per ogni posizione della cerniera, ovvero di fatto per ogni spostamento laterale della cremagliera del sistema di sterzo, la sospensione multilink assume una geometria differente.

L'algoritmo quindi, a livello fisico, impone che a partire da una configurazione iniziale della cremagliera completamente spostata su valori negativi di y , (ovvero di totale sterzata a destra), la posizione del centro ruota assuma tutti i valori possibili a partire dall'estremo negativo fino ad arrivare all'estremo positivo. L'iterazione successiva invece fissa la cremagliera ad una posizione che corrisponde ad un certo richiamo del volante verso sinistra e inizializza un nuovo moto di escursione della ruota.

Il ciclo termina quando la cremagliera ha coperto tutto il possibile campo di spostamenti indotti dal volante.

Schematicamente, la figura riporta la variabilità della posizione della cerniera C, tramite un vettore spostamento che assume valori sia positivi che negativi.

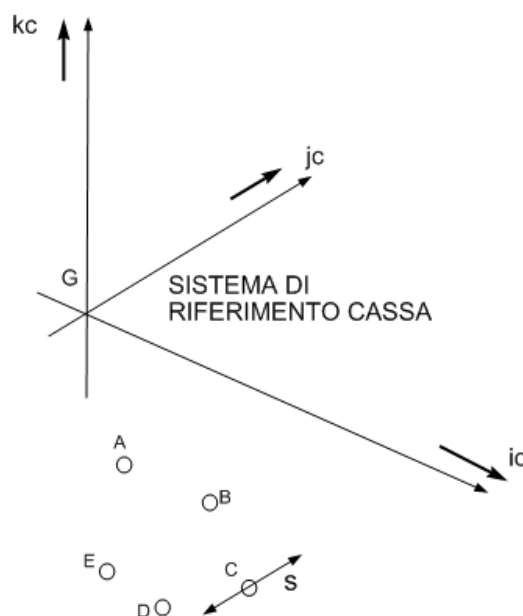


Fig 2.20 – Spostamento laterale della cerniera mobile della sospensione Multilink

All'interno del ciclo di indice j infatti il vettore Y non è più un vettore costante, ma variabile in una delle sue 15 componenti, ovvero proprio quella della posizione laterale della cerniera C .

La riga del file Matlab che esprime questo vettore è di seguito riportata:

$$Y = [653 \ -239 \ 70 \ 909 \ -239 \ 70 \ 950 \ -255 + s(j) \ 60 \ 909 \ -202 \ -116 \ 635 \ -202 \ -109];$$

Come visibile, di tutte le componenti (riferite realmente alla sospensione anteriore destra della ET1 e misurate dal modello Adams della stessa) del vettore Y , una sola è variabile.

Il termine $s(j)$ rappresenta proprio lo spostamento laterale della cremagliera rispetto allo zero, dunque anche quello della cerniera C rispetto alla posizione di simmetria delle sospensioni anteriori (che in questo particolare caso vale appunto -255 mm nel riferimento della cassa).

Ovviamente per la grandezza s devono valere considerazioni analoghe a quelle fatte per l'escursione della sospensione relativamente all'intervallo di variazione. È dunque necessario che la cremagliera venga fatta traslare in positivo e negativo di una quantità sufficiente a garantire una soluzione del cinematismo sull'intero campo di esistenza della variabile.

In entrambi i file, vengono infine definite due matrici e due vettori.

Le prime vengono definite nel file relativo alla sospensione anteriore, dotata infatti di due gradi di libertà, mentre i vettori sono associati alla sospensione posteriore.

La costruzione delle matrici avviene in tempo reale parallelamente alla risoluzione del sistema di equazioni associato alla sospensione anteriore. Tali matrici sono entrambe strutturate in modo da avere lungo una dimensione l'escursione sv_{ant} , mentre lungo l'altra dimensione lo spostamento laterale s della cremagliera.

Una matrice deve essere associata all'angolo di convergenza δ , mentre l'altra all'angolo di camber γ . Il risultato finale quindi è quello di avere a disposizione due matrici all'interno delle quali sono raccolti tutti i valori degli angoli in funzione sia della posizione verticale del centro ruota che dello spostamento laterale della cremagliera, nonché dell'angolo di sterzo volante.

Per l'assale posteriore invece bastano due vettori, rispettivamente associati a δ e γ , che raccolgono tutti i valori in funzione solo della posizione verticale del centro ruota. L'ultimo passo è quello di creare quattro Lookup Tables all'interno del modello Simulink, di cui due monodimensionali e due bidimensionali rispettivamente associate alla sospensione anteriore e a quella posteriore. Al loro interno sono richiamate tutte le grandezze sopra definite, quindi posizioni, matrici e vettori.

Nelle Lookup Tables quindi entrano come ingressi la variabile sv_{ant} ed s , mentre in quelle della sospensione posteriore solo sv_{post} .

Nelle immagini sottostanti sono riportate le interfacce grafiche relative agli script di Matlab per la risoluzione del sistema di equazioni rispettivamente della sospensione posteriore e anteriore.


```

1
2 -   close all;
3
4 -   clear all;
5
6 -   global z0 y z L
7
8
9   %y=(xA,yA,zA,xB,yB,zB,xC,yC,zC,xD,yD,zD,xE,yE,zE)
10  %z=(xA1,yA1,zA1,xB1,yB1,zB1,xC1,yC1,zC1,xD1,yD1,zD1,xE1,yE1,zE1)
11  %L=(L1,L2,L3,L4,L5)
12  %x0=(teta1,teta2,teta3,teta4,teta5,teta6,teta7,teta8,teta9,teta10,x0,y0,delta0,
13
14 -   y=[-937 -225 70 -620 -225 70 -620 -225 70 -620 -226 -109 -937 -226 -116];
15 -   z=[-13 50 115 -13 50 115 45 55 115 13 30 -115 13 30 -115];
16 -   L=[327.7 359.5 327.5 360.1 352.5];
17
18 -   x0=[-1.1774 -0.1589 -2.1441 -0.1447 -2.0011 -0.1562 -2.0692 -0.25
19 -   sv_post=-100:1:100;
20 -   X=[];
21
22 -   for i=1:length(sv_post)
23 -   z0=sv_post(i);
24
25 -   x=fsolve(@multilink_nlangoli_ok,x0);
26 -   x0=x;
27 -   |
28 -   X=[X;x];
29 -   end
30
31 -   sterzo=X(:,13);
32 -   camber=X(:,14);
33 -   chi=X(:,15);
34 -   psx0=X(:,11);
35 -   psy0=X(:,12);
36
37
38
39 -   a=transpose(sterzo);
40
41 -   b=transpose(camber);
42

```

Fig 2.21 – Interfaccia dell’algoritmo di risoluzione della congruenza
per la sospensione posteriore destra

```

Editor - C:\Documents and Settings\Pippo\Desktop\Tesi Specialistica 9.12.08\Multilink\Sospensione anteriore d
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons] [1.0] [1.1] [Icons] [Stack: Base]
1 - global z0 y z L
2
3 %y=(xA,yA,zA,xB,yB,zB,xC,yC,zC,xD,yD,zD,xE,yE,zE)
4 %z=(xA1,yA1,zA1,xB1,yB1,zB1,xC1,yC1,zC1,xD1,yD1,zD1,xE1,yE1,zE1)
5 %L=(L1,L2,L3,L4,L5)
6 %x0=(teta1,teta2,teta3,teta4,teta5,teta6,teta7,teta8,teta9,teta10,x0,y0,delta0,g
7
8 z=[-13 47 115 -13 47 115 32 17 105 13 27 -115 13 27 -115];
9 L=[344.4 339.9 351.5 383.2 411.5];
10 x0=[ -1 0 -2 0 -2 0 -2 0 -1 0 800 -600 0 0 0 ];
11
12 sv=-100:1:100;
13 X=[];
14 s=-15:1:15;
15
16
17 % s negativo significa sterzata a destra
18
19
20 gammaM=[];
21 sterzoM=[];
22
23 for j=1:length(s)
24
25 p=[653 -239 70 909 -239 70 950 -255+s(j) 60 909 -202 -116 635 -202 -109];
26
27 gamma=[];
28 sterzo=[];
29
30
31 for i=1:length(sv)
32 z0=sv(i);
33 x=fsolve(@multilink_nlangoli_ok,x0);
34 x0=x;
35 %X=[X;x];
36
37 gamma=[gamma,x(14)];
38 sterzo=[sterzo,x(13)];
39
40
41
42 end
43

```

Fig 2.22 – Interfaccia dell’algoritmo di risoluzione della congruenza
per la sospensione anteriore destra

Di seguito invece sono rappresentate le interfacce grafiche dei blocchi di comando delle Lookup Tables associate all'angolo di camber della sospensione posteriore destra nel primo caso e all'angolo di convergenza della sospensione anteriore destra nel secondo.

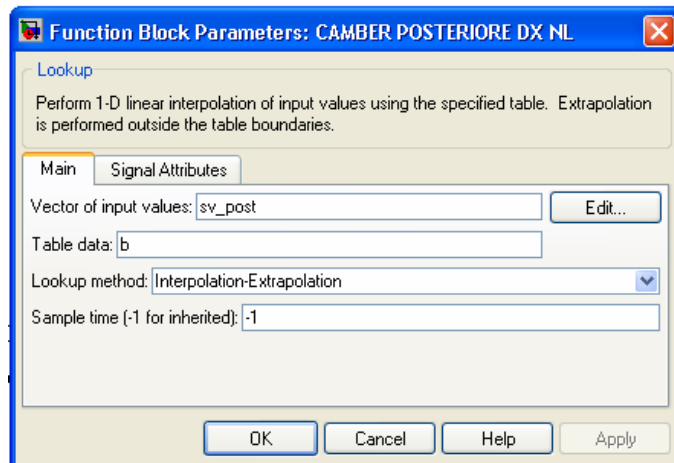


Fig 2.23 – Interfaccia di comando per il camber della sospensione posteriore destra

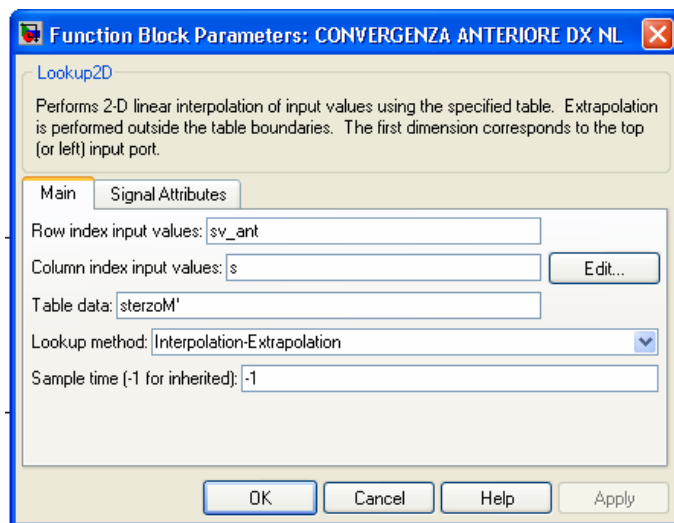


Fig 2.24 – Interfaccia di comando per la convergenza della sospensione anteriore destra

Una parentesi deve essere aperta a riguardo delle posizioni delle cerniere del portamozzo nel proprio sistema di riferimento.

Dal modello Adams infatti sono facilmente ricavabili le posizioni delle cerniere del portamozzo nel riferimento della cassa. Nella trattazione è richiesta invece la posizione delle cerniere in un riferimento solidale al portamozzo e teoricamente arbitrario.

La cosa più comoda come detto è che tale riferimento abbia l'asse 2 parallelo all'asse ruota, perché in questo modo gli angoli che ne definiscono l'orientazione sono effettivamente gli angoli di camber e di convergenza.

Nel caso particolare in cui nel modello Adams del veicolo non siano presenti angoli di convergenza e camber statici, allora i vettori che identificano le cerniere del portamozzo nel proprio riferimento sono facilmente ricavabili dalla differenza tra la posizione delle stesse nel riferimento della cassa e la posizione del centro del riferimento.

Qualora invece nel modello siano presenti in effetti angoli statici, il procedimento appena visto deve essere integrato da una fase di ricerca delle posizioni volute. Per far questo è sufficiente la conoscenza di due punti qualsiasi dell'asse ruota. Uno di questi può ovviamente essere il centro ruota, mentre l'altro è da prendersi a piacere.

Note le coordinate assolute dei punti dell'asse, è facile determinare la matrice di rotazione che lega i riferimenti nella posizione statica.

In primo luogo è necessario trovare il versore che identifica l'asse di rotazione della ruota.

Per questo basta dividere il vettore che congiunge i due punti per il proprio modulo.

Dal versore dell'asse sono quindi ricavabili gli altri due versori della terna solidale al portamozzo, attraverso semplici prodotti vettoriali.

$$\mathbf{i}_m = \frac{\mathbf{j}_m \times \mathbf{k}_c}{\sqrt{(\mathbf{k}_c \times \mathbf{j}_m) \cdot (\mathbf{k}_c \times \mathbf{j}_m)}} \quad (2.111)$$

Analogamente è possibile ricavare l'asse \mathbf{k}_m .

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{i}_m \times \mathbf{j}_m \quad (2.112)$$

A questo punto possono essere scritti legami semplici tra il versore dell'asse di rotazione della ruota e quelli della cassa attraverso proprio gli angoli di convergenza e camber statici.

In particolare:

$$\gamma_0 = \text{Arcsen}(\mathbf{k}_C \times \mathbf{k}_m) \cdot \mathbf{i}_m) \quad (2.113)$$

$$\delta_0 = \text{Arcsen}(\mathbf{k}_C \cdot (\mathbf{i}_C \times \mathbf{i}_m))$$

Non interessando l'angolo di incidenza χ , la matrice di rotazione tra i riferimenti si semplifica leggermente rispetto a quella generale che comprende le 3 rotazioni elementari, assumendo la seguente forma

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} \cos \delta_0 & -\sin \delta_0 & 0 \\ \sin \delta_0 & \cos \delta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_0 & -\sin \gamma_0 \\ 0 & \sin \gamma_0 & \cos \gamma_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{10} \mathbf{A}^{21} = \begin{bmatrix} \cos \delta_0 & -\cos \gamma_0 \sin \delta_0 & \sin \gamma_0 \sin \delta_0 \\ \sin \delta_0 & \cos \gamma_0 \cos \delta_0 & -\sin \gamma_0 \cos \delta_0 \\ 0 & \sin \gamma_0 & \cos \gamma_0 \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

Sostituendo i valori trovati di camber e convergenza statica all'interno della matrice di rotazione legante i due sistemi di riferimento è possibile quindi avere, in forma numerica, la matrice che lega le componenti di uno stesso vettore ai due riferimenti.

Per determinare le posizioni delle cerniere di attacco dei braccetti al portamozzo, non rimane quindi che effettuare il prodotto tra la trasposta della matrice appena trovata e i vettori che identificano la posizione delle stesse nel riferimento della cassa.

2.3.3 Modello di pneumatico

Per la trattazione relativa al modello di pneumatico usato ai fini del calcolo delle azioni provenienti da terra, si rimanda al paragrafo 3.4.3, dove sarà trattato in modo completo l'aspetto del contatto pneumatico - suolo.

3 Il modello di veicolo con inerzia delle ruote – Formulazione delle Equazioni

In questo capitolo viene trattata l'analisi della dinamica del veicolo nel caso in cui le ruote siano dotate di inerzia.

Per tutti gli aspetti che rimangono inalterati rispetto alla precedente trattazione si citeranno solo i riferimenti. Tutto il resto sarà trattato in modo completo.

Come premessa a tutta la nuova trattazione, è necessario aprire una parentesi circa il processo di linearizzazione delle espressioni.

La cinematica delle sospensioni comporta, in generale, accelerazioni angolari del portamozzo che di fatto si trasferiscono anche sulle ruote intorno ad assi ortogonali a quello di rotazione.

Per i motivi illustrati in seguito, ai fini di una semplificazione analitica indispensabile, il vettore intorno al quale si linearizza non presenta le componenti appena citate.

L'altro aspetto collegato alla presenza delle ruote è la deformabilità radiale del pneumatico. Tali grandezze verranno indicate con h_{jp} da considerarsi positive se responsabili di una compressione del pneumatico.

Per le piccole compressioni cui sono soggetti i pneumatici, le grandezze appena citate sono anch'esse prossime a zero. Anche le velocità di compressione e le accelerazioni di compressione sono piccole in modulo.

Appare quindi sensato aggiungere alle componenti del vettore intorno cui avviene la linearizzazione, altre 12 componenti rappresentate dalle 4 compressioni, dalle 4 velocità e dalle 4 accelerazioni di compressione.

Il vettore risultatane ha quindi dimensione pari a 32.

Ovviamente è da ricordare che nell'algoritmo che definisce la procedura di linearizzazione della generica funzione, devono essere aggiunta la combinazione lineare di derivate parziali e scarti delle singole componenti.

3.1 Cinematica della cassa

Per quanto riguarda questo aspetto, niente deve essere aggiunto rispetto a quanto già detto. I riferimenti utilizzati sono gli stessi, dunque le espressioni di velocità lineare ed angolare sono esattamente le stesse.

3.2 Dinamica della cassa – Scrittura delle Equazioni Cardinali

La trattazione anche in questo caso è identica a quella riportata nel paragrafo 2.2

3.3 Cinematica delle ruote

Lo studio della cinematica delle ruote serve per poter successivamente scrivere i termini inerziali associati al moto delle ruote, che entreranno a far parte delle equazioni descrittive del modello.

Rispetto al modello precedente la grandezze geometriche aggiuntive che sono associate alla presenza delle ruote, sono la loro posizione angolare rispetto al riferimento del portamozzo e l'entità della compressione radiale dei pneumatici.

La prima delle due in realtà non è così importante, perché molto più importante è la sua derivata.

La seconda invece serve per le equazioni di congruenza relative al punto di contatto a terra e nella trattazione verranno indicate con h_p , da intendersi positive se responsabili di una diminuzione del raggio di rotolamento del pneumatico.

A questo proposito l'ipotesi è che il contatto avvenga sempre nel piano medio della ruota, in presenza o meno di deformazione.

3.3.1 Scrittura della velocità di traslazione del centro ruota

Le velocità che caratterizzano la ruota sono quella lineare del centro ruota, ipotizzato coincidente con il baricentro di tutto il gruppo ruota, e quella angolare del cerchio.

A questo proposito è necessario fare una distinzione tra l'inerzia traslante e rotante. Nel primo caso questa è attribuita a tutto il gruppo ruota, mentre nel secondo solo al cerchio. Il contributo introdotto infatti dalle rotazioni del portamozzo non viene considerato nel conteggio del tensore di

inerzia. Anche in questo si passa dai teoremi di composizione delle velocità. Il sistema di riferimento mobile a bordo del quale si osserva il moto del centro ruota è quello solidale alla cassa. In questo sistema il moto del centro ruota è, per le ipotesi fatte in precedenza, con componente puramente verticale. La velocità di traslazione del centro ruota quindi è

$$\mathbf{V}_{Cij} = \mathbf{V}_{Cij}^{tr} + \mathbf{V}_{Cij}^r \quad (3.1)$$

dove i singoli contributi sono

$$\mathbf{V}_{Cij}^{tr} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega}_C \wedge \mathbf{GC}_{ij} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{V}_{Cij}^r = \dot{z}C_{ij} \mathbf{k}_C \quad (3.3)$$

Prima di esplicitarne la forma, è necessario aggiornare le espressioni delle posizioni verticali dei centri ruota nel riferimento della cassa. Come accennato sopra, l'effetto della comprimibilità del pneumatico è quello di indurre una diminuzione del raggio della ruota, quindi le grandezze h_{ij} devono andare ad agire proprio sui raggi R_i .

Le espressioni dunque diventano

$$zC_{11} = (R_1 - h_{11}) - (h + t_1 \Phi) + a_1 \theta$$

$$zC_{12} = (R_1 - h_{12}) + (-h + t_1 \Phi) + a_1 \theta$$

$$zC_{21} = (R_2 - h_{21}) - (h + t_2 \Phi) - a_2 \theta$$

$$zC_{22} = (R_2 - h_{22}) + (-h + t_2 \Phi) - a_2 \theta$$

(3.4)

La cui derivazione temporale fornisce altre quattro equazioni di vincolo

$$\frac{dzC_{11}}{dt} = -\dot{h}_{11} - (\dot{h} + t_1 \dot{\Phi}) + a_1 \dot{\theta}$$

$$\frac{dzC_{12}}{dt} = -\dot{h}_{12} + (-\dot{h} + t_1 \dot{\Phi}) + a_1 \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}\frac{dzC_{21}}{dt} &= -\dot{h}_{21} - (\dot{h} + t_2 \dot{\Phi}) - a_2 \dot{\theta} \\ \frac{dzC_{22}}{dt} &= -\dot{h}_{22} + (-\dot{h} + t_2 \dot{\Phi}) - a_2 \dot{\theta}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Sviluppando le espressioni il risultato che si ottiene è la velocità assoluta del centro ruota. Nel caso della ruota anteriore sinistra, in componenti della terna ausiliaria, è rappresentata dal seguente vettore:

$$\mathbf{V}_{Cij} = \begin{bmatrix} u - t_1 \dot{\psi} + (\dot{\psi} \phi + \dot{\theta})(-h + R_1) \\ a_1 \dot{\psi} + v + (\dot{\psi} \theta - \dot{\phi})(R_1 - h) \\ -\dot{h}_{11} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

In questo caso non tutte le espressioni sono esattamente in questo modo, perché il ruolo delle semicarreggiate e dei semipassi non è lo stesso. La combinazione è sempre con i termini scritti, ma i segni cambiano nel passaggio tra ruote sinistre e destre, come in quello tra anteriori e posteriori.

3.3.2 Scrittura della velocità angolare delle ruote

Per la scrittura della velocità angolare della ruota il riferimento ausiliario utilizzato è quello mobile. L'ipotesi, come anticipato nell'introduzione al paragrafo 2.2, è che le velocità addizionali introdotte dalla sterzata a terra delle ruote e dalla velocità di variazione dell'angolo di camber siano trascurate rispetto alle altre componenti. Per queste ragioni la velocità angolare delle ruote è facilmente scrivibile nel riferimento mobile.

$$\boldsymbol{\Omega}_{ij} = \boldsymbol{\Omega}_{ij}^{tr} + \boldsymbol{\Omega}_{ij}^r \quad (3.7)$$

I singoli contributi sono

$$\boldsymbol{\Omega}_{ij}^{tr} = \dot{\psi} \mathbf{k} \quad \boldsymbol{\Omega}_{ij}^r = \omega_{ij} \mathbf{j}_{ij} \quad (3.8)$$

dove con ω_{ij} si è indicata la velocità di rotazione della ruota intorno al proprio asse. Ovviamente l'asse ruota \mathbf{j}_{ij} cambia orientazione durante il moto del veicolo, ma le velocità con cui cambia non sono appunto considerate come appartenenti alle ruote.

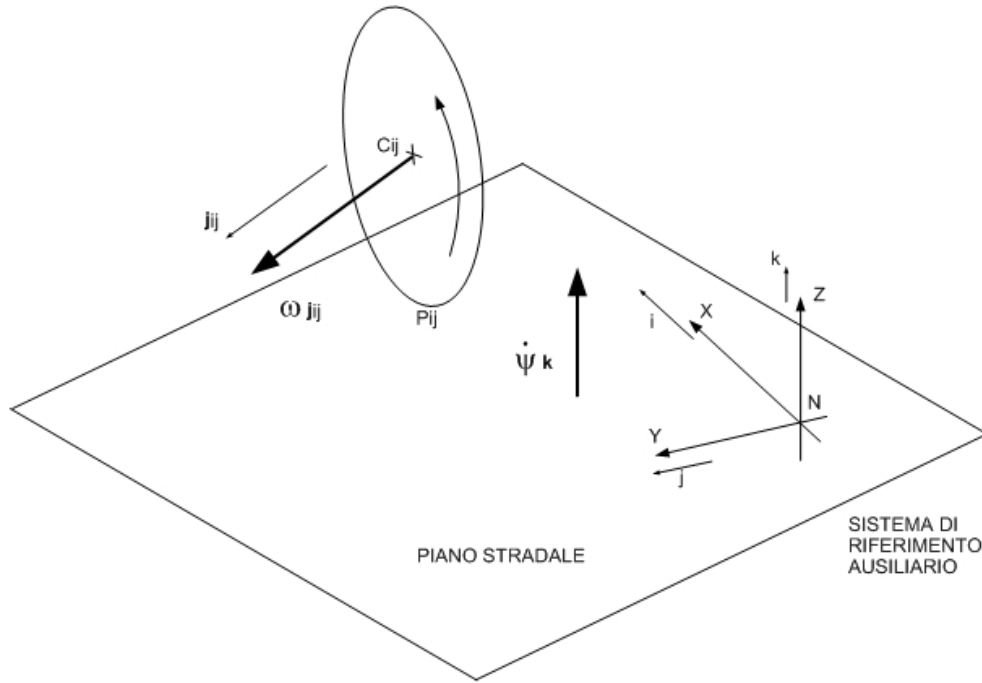


Fig 3.1 – Velocità angolare della ruota

La combinazione delle due velocità porta al seguente risultato:

$$\mathbf{\Omega}_{ij} = (-\delta_{ij}\omega_{ij})\mathbf{i} + (\omega_{ij})\mathbf{j} + (\dot{\psi} + \omega_{ij}(\gamma_{ij} + \phi))\mathbf{k} \quad (3.9)$$

Con δ_{ij} e γ_{ij} si ricorda che si sono indicati rispettivamente gli angoli di convergenza e di camber relativi alla cassa delle ruote.

Si ricorda però che la forma linearizzata degli angoli di sterzo e di camper effettivi coincidono rispettivamente con le seguenti espressioni

$$\delta_{sij} = \delta_{ij} \quad (3.10)$$

$$\gamma_{sij} = \gamma_{ij} + \phi$$

3.4 Dinamica delle ruote – Scrittura delle Equazioni Cardinali

La presenza delle ruote, non solo a livello geometrico, ma anche a livello inerziale introduce la vera differenza tra il modello in esame e quello sviluppato precedentemente.

Per questo è necessario studiare gli effetti inerziali introdotti dalle ruote, attraverso le consuete ipotesi semplificative a livello di linearizzazione.

3.4.1 Scrittura dei termini inerziali

I termini inerziali che interessano sono l'accelerazione del centro ruota e la derivata temporale del momento angolare delle ruote rispetto al proprio centro. In realtà anche il momento angolare rappresenta un termine inerziale in quanto “combinazione” di cinematica e inerzia della ruota. In questo paragrafo quindi si dedicheranno alcune pagine per la loro esplicitazione.

3.4.1.1 Momento angolare delle ruote

Il momento angolare è facilmente scrivibile come il prodotto tra tensore di inerzia della ruota e velocità angolare della stessa, espressi nello stesso riferimento.

Dunque

$$\mathbf{L}_{Cij} = \mathbf{I}_{ij} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ij} \quad (3.11)$$

Il tensore si esprime bene in un riferimento solidale che abbia gli assi coincidenti con quelli principali di inerzia della ruota.

In questo modo si ha

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & Ia & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Con Id si è indicato il momento di inerzia della ruota rispetto ad un suo diametro, mentre con Ia quello rispetto al suo asse.

Di conseguenza anche il vettore $\boldsymbol{\Omega}_{ij}$ deve essere espresso in quel riferimento. Per farlo, serve la matrice di rotazione tra i riferimenti.

Fino a questo punto della trattazione non è ancora stato definito un sistema solidale alle ruote, in quanto prive di inerzia.

Coerentemente con quanto fatto per la cassa, il sistema solidale alla generica ruota sarà individuato dagli assi $x_{rij}, y_{rij}, z_{rij}$ di versori $\mathbf{i}_{rij}, \mathbf{j}_{rij}, \mathbf{k}_{rij}$.

La figura rappresenta la generica configurazione geometrica della ruota e del suo sistema di riferimento durante il moto del veicolo.

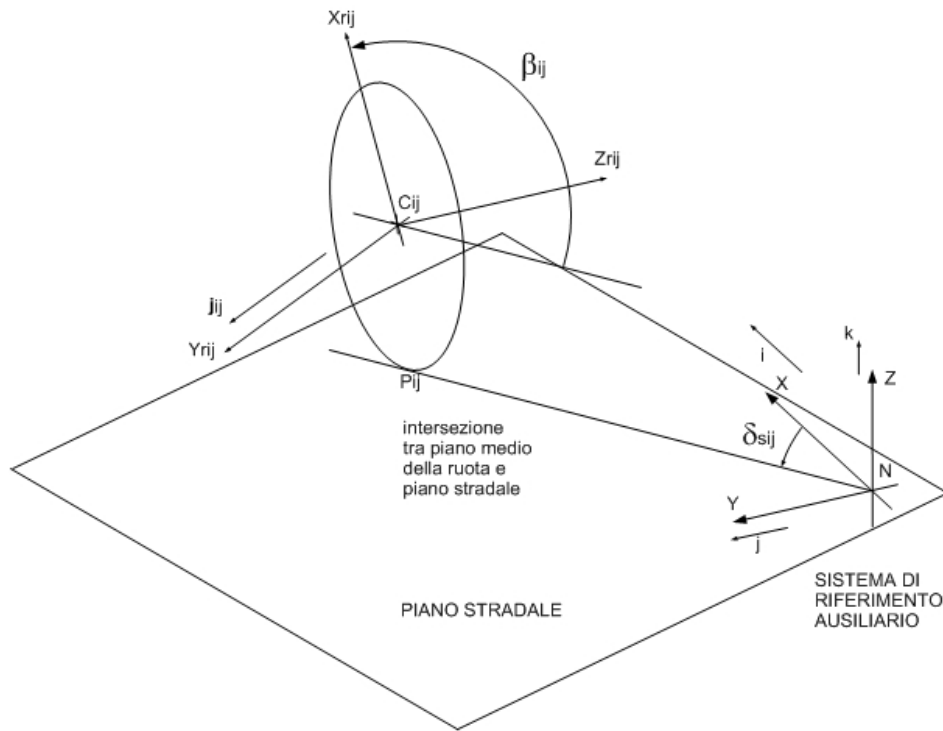


Fig 3.2 – Sistema di riferimento della ruota

Per scrivere il vettore velocità angolare nel riferimento voluto è necessario conoscere l'orientazione degli assi del riferimento ruota. In questo modo le componenti della velocità angolare in quel riferimento saranno semplicemente il prodotto scalare tra il vettore in esame e i versori degli assi, ovvero

$$p_{ij} = \boldsymbol{\Omega}_{ij} \cdot \mathbf{i}_{rij}$$

$$q_{ij} = \boldsymbol{\Omega}_{ij} \cdot \mathbf{j}_{rij}$$

$$r_{ij} = \boldsymbol{\Omega}_{ij} \cdot \mathbf{k}_{rij}$$

(3.13)

Non resta quindi che scrivere i versori del riferimento ruota. Quello già noto è il versore \mathbf{j}_{rij} che identifica l'asse della ruota.

$$\mathbf{j}_{rij} = -\delta_{ij}\mathbf{i} + \mathbf{j} + (\gamma_{ij} + \phi)\mathbf{k} \quad (3.14)$$

Gli altri due possono essere visti come combinazione trigonometrica di loro stessi quando si trovano nella condizione corrispondente a $\beta_{ij} = 0$.

In questa particolare condizione infatti si ha

$$\mathbf{i}_{rij\ 0} = -\delta_{ij}\mathbf{j} - \mathbf{i} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{k}_{rij\ 0} = (\gamma_{ij} + \phi)\mathbf{j}_{sij} - \mathbf{k} \quad (3.16)$$

Da ricordare che il versore \mathbf{j}_{sij} è ortogonale all'intersezione tra piano medio della ruota e piano stradale. La sua espressione linearizzata, come già visto è

$$\mathbf{j}_{sij} = -\delta_{ij}\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad (3.17)$$

A questo punto possono essere scritti i versori della ruota in una generica condizione individuata dall'angolo β_{ij} .

$$\mathbf{i}_{rij} = \cos \beta_{ij} \mathbf{i}_{rij\ 0} - \sin \beta_{ij} \mathbf{k}_{rij\ 0} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{k}_{rij} = \sin \beta_{ij} \mathbf{i}_{rij\ 0} + \cos \beta_{ij} \mathbf{k}_{rij\ 0} \quad (3.19)$$

Effettuando ancora la linearizzazione quello che si ricava sono le seguenti espressioni dei prodotti scalari

$$p_{ij} = \dot{\psi} \sin \beta_{ij}$$

$$q_{ij} = \dot{\psi} \cdot (\gamma_{ij} + \phi) + \omega_{ij}$$

$$r_{ij} = \dot{\psi}_{ij} \cos \beta_{ij} \quad (3.20)$$

Il momento angolare della ruota calcolato rispetto al suo centro ed espresso nel proprio riferimento è quindi:

$$\mathbf{L}_{cij} = \begin{bmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & Ia & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ij} \\ q_{ij} \\ r_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Il Software Mathematica ne fornisce la versione nelle componenti della terna mobile ausiliaria.

$$\mathbf{L}_{cij} = -(I_a \delta_{ij} \omega_{ij}) \mathbf{i} + ((I_a - I_d)(\gamma_{ij} + \phi)\dot{\psi} + I_a \omega_{ij}) \mathbf{j} + (I_d \dot{\psi} + (\gamma_{ij} + \phi)I_a \omega_{ij}) \mathbf{k} \quad (3.22)$$

Come da aspettarsi, siccome la ruota ha un tensore d'inerzia diagonale (nella più che reale ipotesi di un suo perfetto equilibrio dinamico), il momento angolare della ruota non può evidentemente dipendere dall'angolo β_{ij} , ma solo dalla velocità angolare ω_{ij} .

3.4.1.2 Accelerazione del centro ruota

Il calcolo delle accelerazioni può passare o dall'applicazione del teorema di composizione delle accelerazioni o dalla derivazione rispetto al tempo del vettore velocità.

In ogni caso, il risultato cui si giunge, sempre nel caso di ruota anteriore sinistra, e con componenti riferite alla terna mobile, è

$$\mathbf{a}_{Cij} = \begin{bmatrix} \dot{u} - t_1 \ddot{\psi} + a_1 \dot{\psi}^2 - v \dot{\psi} + (\ddot{\theta} + 2\dot{\psi}\dot{\phi} + \ddot{\psi}\phi + \dot{\psi}^2 \phi)(R_1 - h) \\ \dot{v} + a_1 \ddot{\psi} - t_1 \dot{\psi}^2 + u \dot{\psi} + (R_1 - h)(2\dot{\psi}\dot{\theta} - \ddot{\phi} + \ddot{\psi}\theta + \dot{\psi}^2 \phi) \\ - \ddot{h}_{11} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Analoghe considerazioni valgono per quanto riguarda i cambiamenti dei segni nel passaggio da una ruota all'altra.

3.4.1.3 Derivata del momento angolare delle ruote

Il momento angolare delle ruote, nella sua versione semplificata, si è visto essere:

$$\mathbf{L}_{Cij} = -(I_a \delta_{ij} \omega_{ij}) \mathbf{i} + ((I_a - I_d)(\gamma_{ij} + \phi)\dot{\psi} + I_a \omega_{ij}) \mathbf{j} + (I_d \dot{\psi} + (\gamma_{ij} + \phi)I_a \omega_{ij}) \mathbf{k} \quad (3.24)$$

La sua derivata è ricavabile dalla stessa espressione, derivando sia componenti che versori.

Dunque:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{Cij}}{dt} = & -\frac{d}{dt}(I_a \delta_{ij} \omega_{ij}) \mathbf{i} + \frac{d}{dt}((I_a - I_d)(\gamma_{ij} + \phi)\dot{\psi} + I_a \omega_{ij}) \mathbf{j} + \\ & \frac{d}{dt}(I_d \dot{\psi} + (\gamma_{ij} + \phi)I_a \omega_{ij}) \mathbf{k} - (I_a \delta_{ij} \omega_{ij}) \frac{d\mathbf{i}}{dt} + ((I_a - I_d)(\gamma_{ij} + \phi)\dot{\psi} + I_a \omega_{ij}) \frac{d\mathbf{j}}{dt} \end{aligned} \quad (3.25)$$

con

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\psi} \mathbf{j} \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\dot{\psi} \mathbf{i} \quad (3.26)$$

Togliendo gli infinitesimi di ordine superiore, si ottiene finalmente l'espressione della derivata del momento angolare della ruota rispetto al proprio centro.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{Cij}}{dt} = & (-I_a \delta_{ij} \dot{\omega}_{ij} - \dot{\psi}^2 (I_a - I_d)(\gamma_{ij} + \phi) - I_a \omega_{ij} \dot{\psi}) \mathbf{i} + \\ & (I_a \dot{\omega}_{ij} + (I_a - I_d)(\gamma_{ij} + \phi)\ddot{\psi} - I_a \delta_{ij} \omega_{ij} \dot{\psi}) \mathbf{j} + (I_d \ddot{\psi} + (\gamma_{ij} + \phi)I_a \dot{\omega}_{ij}) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Anche per questo modello sono quindi noti i termini inerziali.

3.4.2 Scrittura dei termini forzanti

Le ruote sono soggette alle azioni provenienti dalla strada, e a quelle provenienti dalla cassa, oltre che risentire del peso proprio. La situazione in cui si trova la ruota in un generico istante durante il moto del veicolo è la seguente.

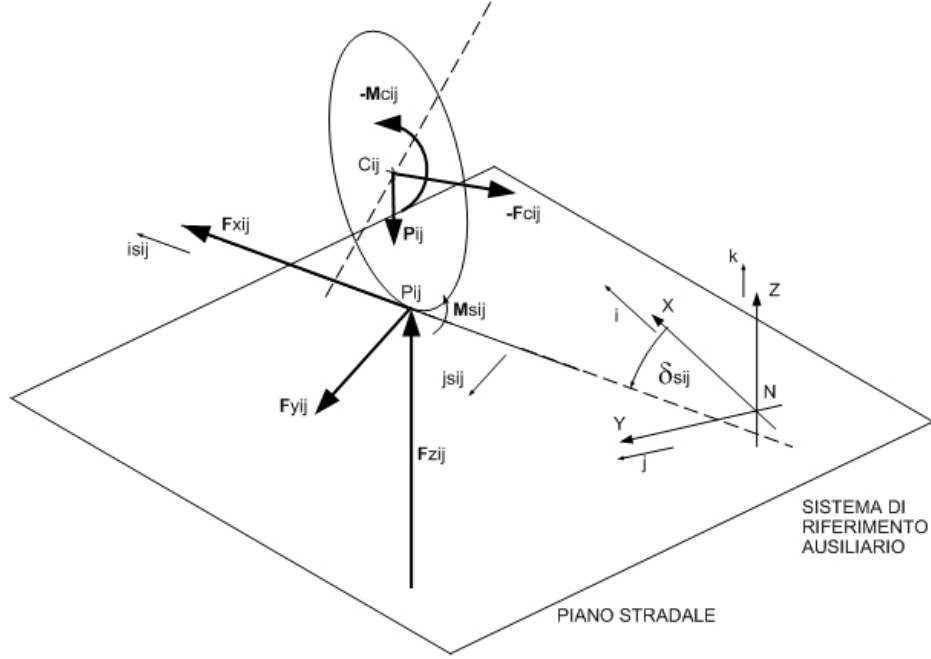


Fig 3.3 – Azioni sulla ruota durante il moto

Secondo quanto già visto nel Capitolo 2, le azioni agenti sulla ruota possono essere scritte così:

$$-\mathbf{F}_{cij} = -F_{cxij} \cdot \mathbf{i}_c - F_{cyij} \cdot \mathbf{j}_c - F_{czij} \cdot \mathbf{k}_c$$

$$-\mathbf{M}_{cij} = -M_{cxij} \cdot \mathbf{i}_c - M_{cyij} \cdot \mathbf{j}_c - M_{czij} \cdot \mathbf{k}_c$$

$$\mathbf{M}_{ij} = Mx_{ij} \cdot \mathbf{i}_{sij} + My_{ij} \cdot \mathbf{j}_{sij} + Mz_{ij} \cdot \mathbf{k} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{F}_{ij} = Fx_{ij} \cdot \mathbf{i}_{sij} + Fy_{ij} \cdot \mathbf{j}_{sij} + Fz_{ij} \cdot \mathbf{k} \quad (3.29)$$

$$P_{ij} = -m_i \cdot \mathbf{k}$$

A questo punto servono risultante e momento risultante rispetto al centro ruota. Dunque:

$$\mathbf{R}_{ij} = -\mathbf{F}_{cij} + \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{P}_{ij} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = -\mathbf{M}_{cij} + CP_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{M}_s$$

Il motivo per cui le azioni sono state scritte talvolta in versori del riferimento cassa, talvolta in quelli ausiliari e talvolta in quelli della strada è, come visto, per poter associare loro componenti esprimenti un significato fisico vero e proprio.

3.4.3 Il modello di pneumatico

Come anticipato, nel paragrafo 2.3.3, in questa sezione verrà trattato l'aspetto del contatto tra pneumatico e suolo.

Per il calcolo delle azioni che provengono da terra, è stato utilizzato un modello di pneumatico che nella realtà è una raccolta di dati sperimentali fornita dal FORMULA SAE Tire Test Consortium.

Il processo di estrazione degli andamenti delle azioni a terra, in funzione dei parametri di interfaccia tra pneumatico e suolo, avviene tramite l'utilizzo di un m.file prescritto.

All'interno del file si trova una routine di tipo for – end che, al variare delle condizioni di funzionamento del pneumatico, calcola l'azione che viene esplicitamente richiesta all'inizio del ciclo. Il file mette a disposizione solo alcune delle grandezze che complessivamente si originano dal contatto a terra. In particolare, dal running del file si possono ricavare le forze laterali, quelle longitudinali e il momento di autoallineamento.

I parametri variabili sono quindi carico verticale, angolo di deriva scorrimento longitudinale e angolo di camber assoluto.

L'immagine seguente porta l'algoritmo nel caso, ad esempio, della forza laterale.

```

72 % Single point
73 clear FZ SA IA FY mu
74 FZ = -100; % Normal Load, lb (negative)
75 SA = 2.0; % Slip Angle, deg (+ for left hand turn)
76 IA = 3.0; % Inclination Angle, deg (+ for top of tire leaning to the right)
77 mu = 1; % Road Surface Coefficient
78 FY = expand_mrandim(4,NDIM4,[FZ,SA,IA,0,mu]); % Call to MRA Nondimensional Tire Model
79 disp(['FY = ', num2str(FY), ' lb']); % Show result
80
81 % Make a Graph
82 clear FZ SA IA FY mu
83 FZ = -[10:2:550]; % Normal Load, lb (negative)
84 SA = [-20:0.5:20]; % Slip Angle, deg (+ for left hand turn)
85 IA = [-3:0.5:3]; % Inclination Angle, deg (+ for top of tire leaning to the right)
86 mu = 0.6; % Road Surface Coefficient
87 kk=0;
88 for IACurrent = IA
89     kk = kk + 1;
90     ii = 0;
91
92     for FzCurrent = FZ
93         ii = ii + 1;
94         jj = 0;
95         for AlphaCurrent = SA
96             jj = jj + 1;
97
98             FY(ii,jj,kk) = expand_mrandim(4,NDIM4,[FzCurrent,AlphaCurrent,IACurrent,0,mu]); % Call to MRA Nondime:
99         end
100     end
101 end
102
103 figure(14)
104 plot(SA,FY(:,1,7));grid on;zoom on;
105 xlabel('Slip Angle (deg)');
106 ylabel('Lateral Force (lb)');
107 title(strcat('tireid,', ' ',num2str(IA), ' deg. Inclination Angle'));
108 %legend(num2str(FZ),'Location','Best') %Matlab 7
109 legend(num2str(FZ),0) %pre-Matlab 7
110
111 else
112     disp('Data not found. Variable NDIM4 is needed for Expansion Type 4.')
113 end
114

```

Fig 3.4 – Algoritmo per il calcolo delle forze laterali agenti sul pneumatico

Finito il calcolo, nel Workspace di MATLAB, vengono salvati i risultati appena ottenuti, in modalità di vettore o matrice in base alla grandezza in esame.

Per esempio, la forza laterale, per ogni valore dell'angolo di camber, viene salvata come matrice perché dipendente sia dal carico verticale che dall'angolo di deriva. Il numero di matrici che vanno a costituire il tensore finale della funzione dipende ovviamente dal numero di iterazioni fatte sull'angolo di camber. Come da prassi è necessario far variare le grandezze di input in intervalli sufficienti a raccogliere tutti i valori possibili di funzionamento, e con un passo di discretizzazione basso, in modo da commettere un errore di interpolazione lineare più piccolo possibile.

A questo punto è necessario salvare i file di interesse del Workspace insieme agli altri file parametrici usati per il calcolo della cinematica delle sospensioni. Le curve che si riescono ad ottenere dal processo di funzionamento del file, sono rappresentate nelle figure seguenti. Da precisare che le forze longitudinali e laterali sono state ottenute singolarmente, non andando quindi a studiare le azioni combinate.

Infine gli andamenti riportati, sono stati ottenuti volutamente con un grado di discretizzazione alto, per motivi di leggibilità e con angolo di camber nullo.

Ovviamente, come detto, non è quello che avviene nella realtà all'interno del modello.

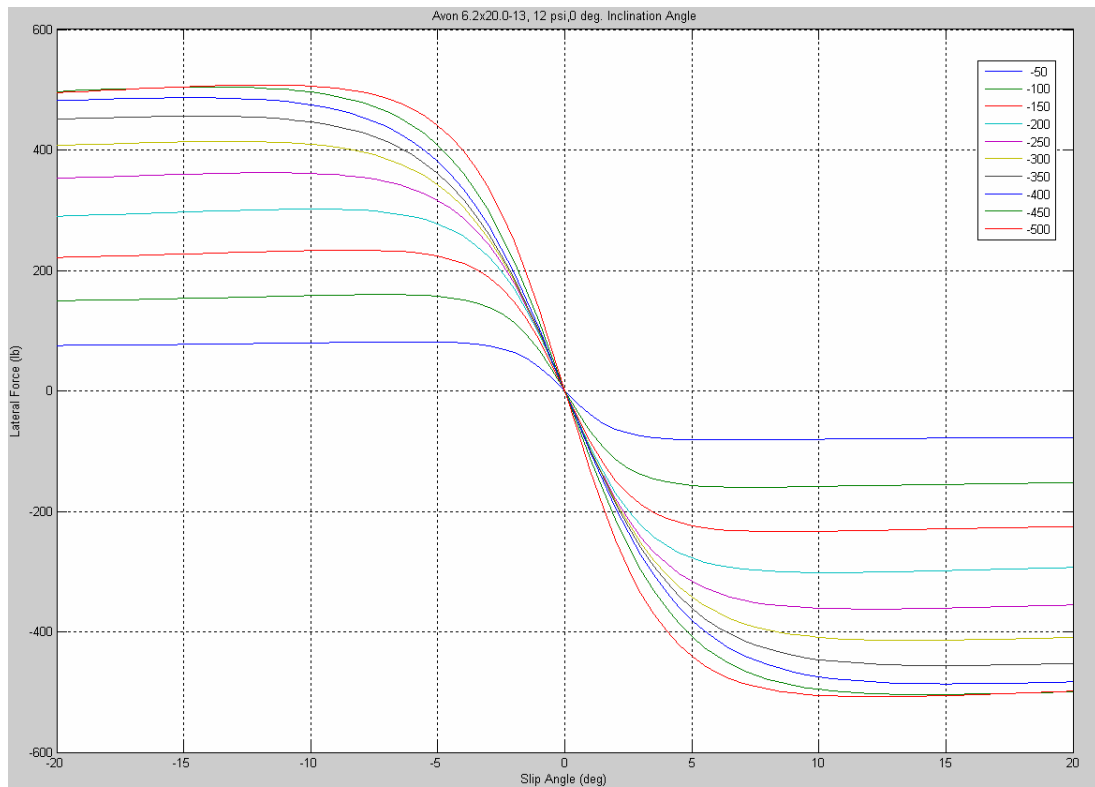


Fig 3.5 – Andamento della forza laterale F_y (in lb), in funzione del carico verticale (in lb) e dell'angolo di deriva (in °)

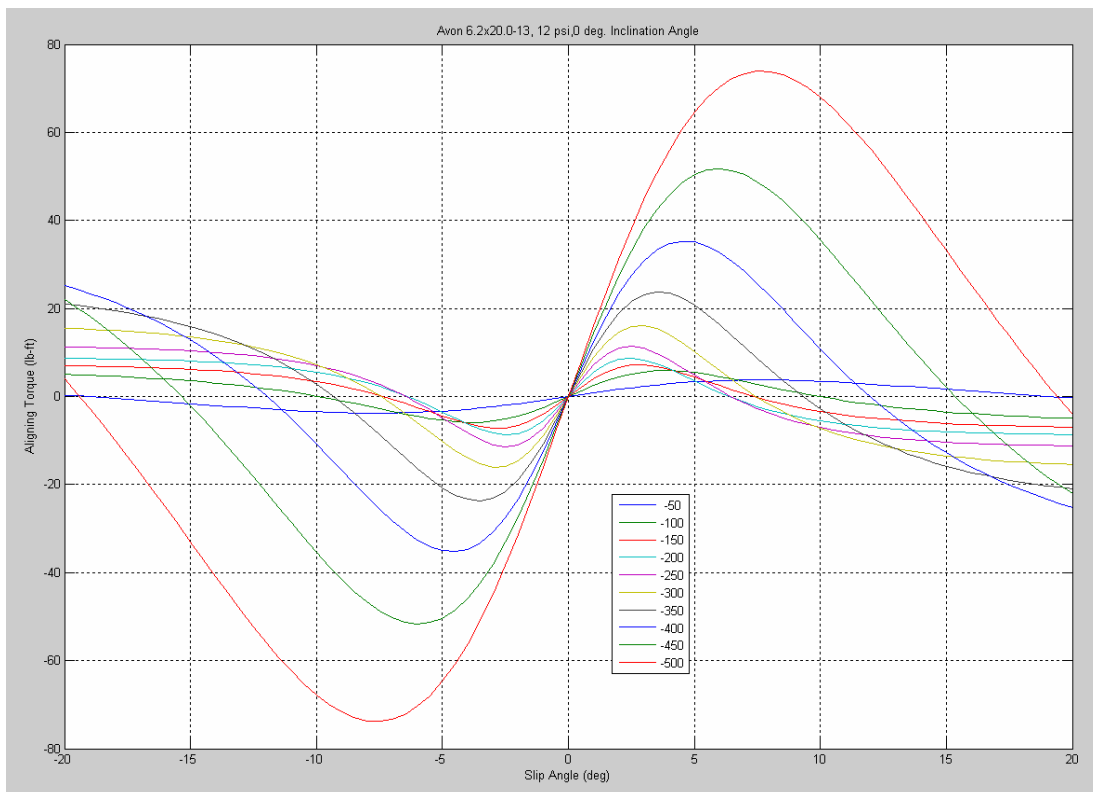


Fig 3.6 – Andamento del momento di autoallineamento M_z (in lb.ft), in funzione del carico verticale (in lb) e dell'angolo di deriva (in °)

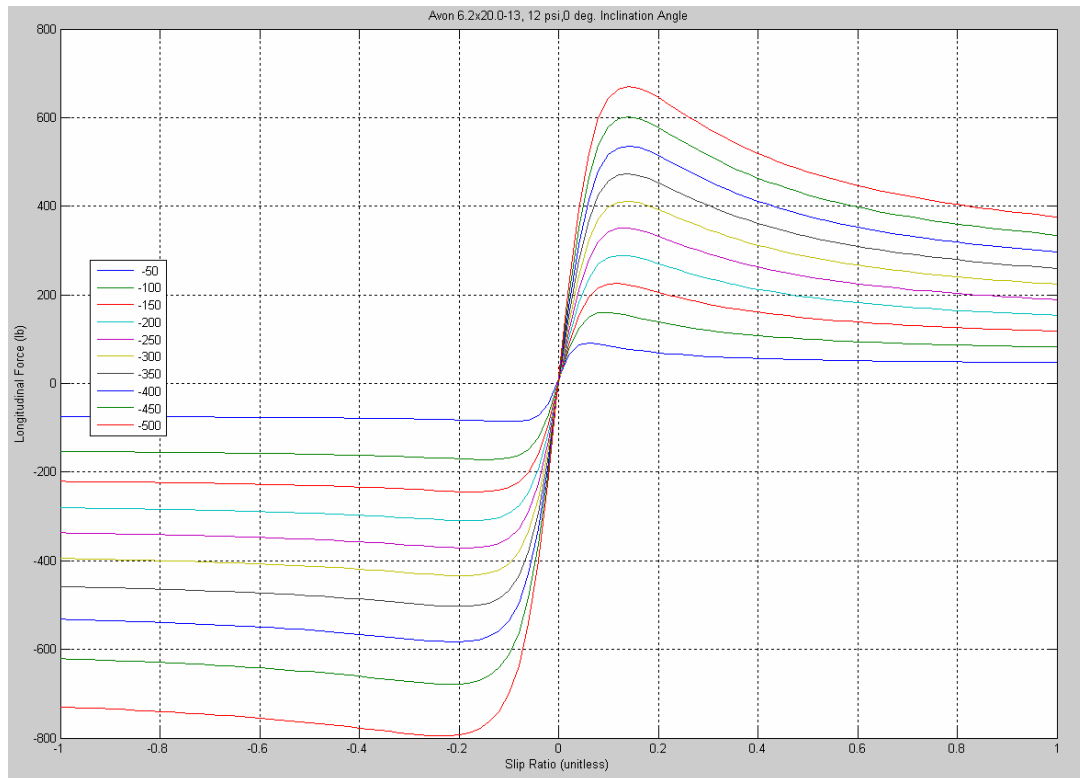


Fig 3.7 – Andamento della forza longitudinale (in lb), in funzione del carico verticale (in lb) e dello scorrimento longitudinale

Di particolare interesse è l'assenza di un'asimmetria della forza longitudinale con lo scorrimento. Questo è da motivarsi con la presenza di un senso di rotazione ben preciso.

L'ultimo passo è quello di caricare i file appena salvati all'interno di Lookup Table, nominando le variabili di ingresso con lo stesso nome del file.

In questo modo per ogni combinazione di parametri in ingresso viene sempre fornito il valore di uscita.

Le interfacce di comando delle Lookup Tables prevedono quindi di richiamare al loro interno i vettori e le matrici appena salvate.

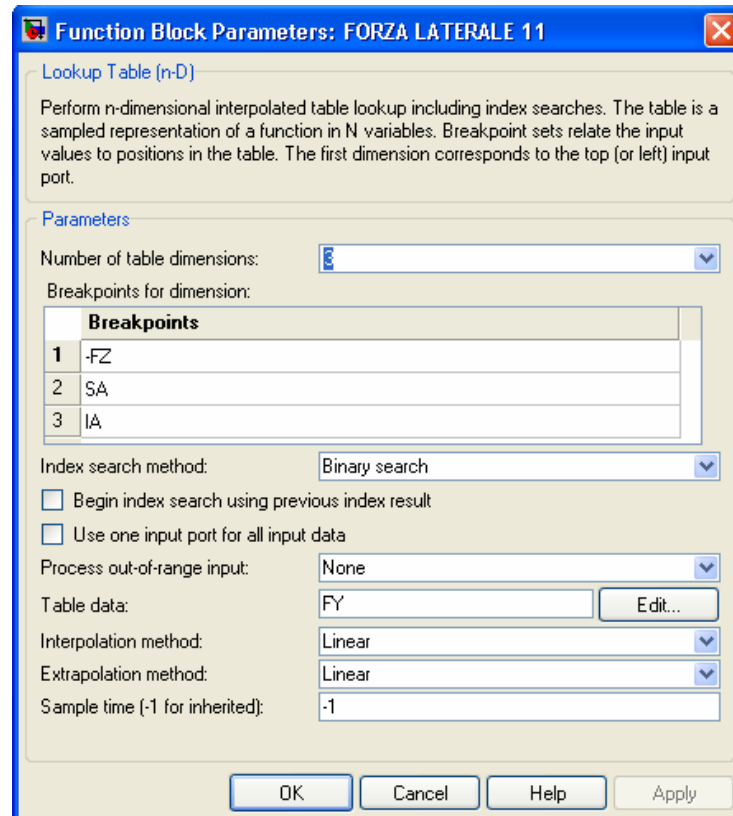


Fig 3.8 – Interfaccia di comando per la forza laterale

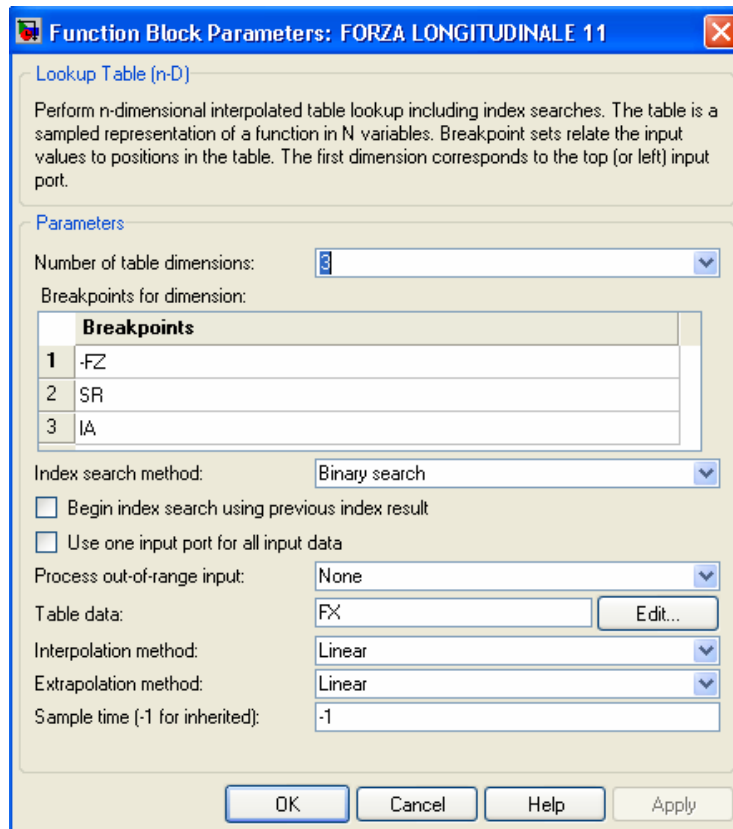


Fig 3.9 – Interfaccia di comando per la forza longitudinale

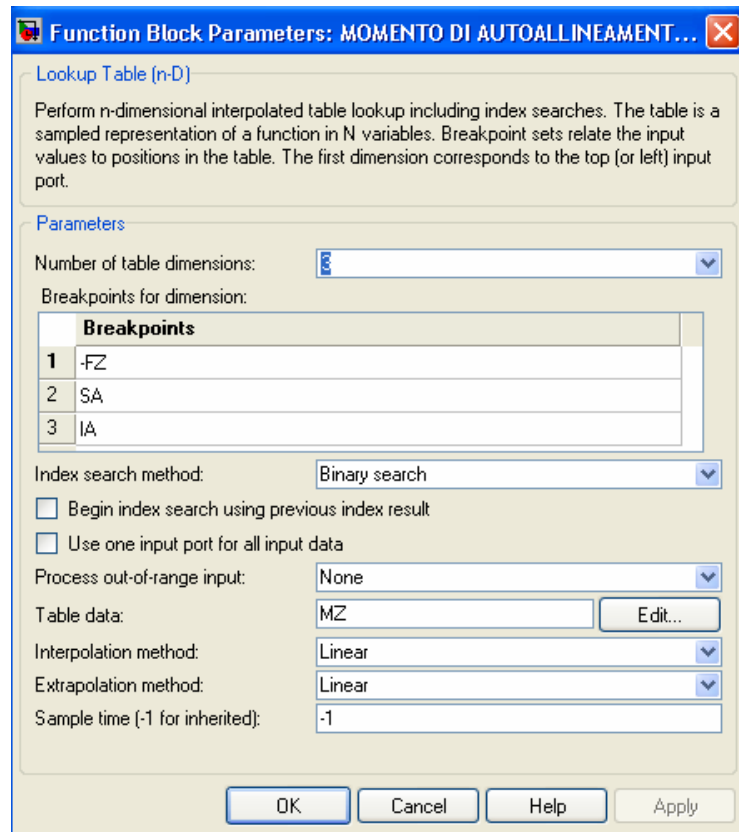


Fig 3.10 – Interfaccia di comando per il momento di autoallineamento

All'interno delle Lookup Table vengono registrati nel Table data tutti i valori delle funzioni per ogni valore delle variabili indipendenti.

Per ogni angolo di camber, il valore della variabile dipendente viene calcolato muovendosi su una superficie tridimensionale.

Riferendosi ad esempio al caso di angolo di camber nullo, le superfici relative alle azioni sopra citate sono raffigurate di seguito.

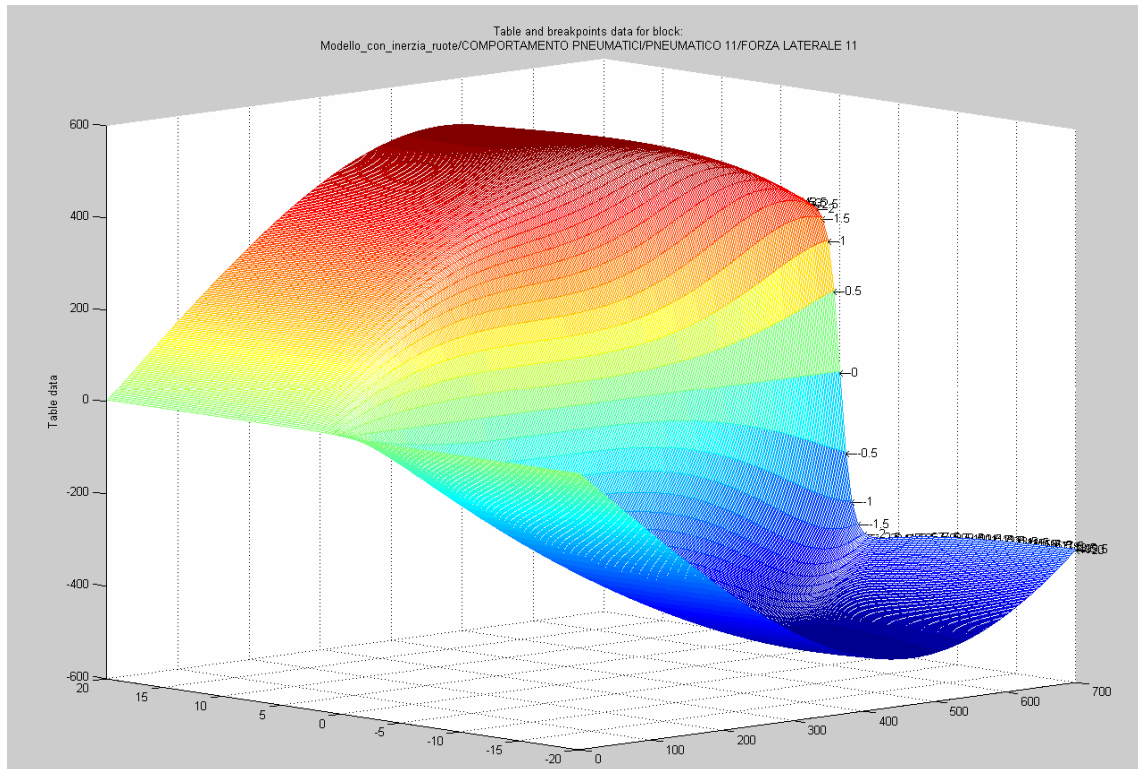


Fig 3.11 – Superficie di forza laterale (in lb)

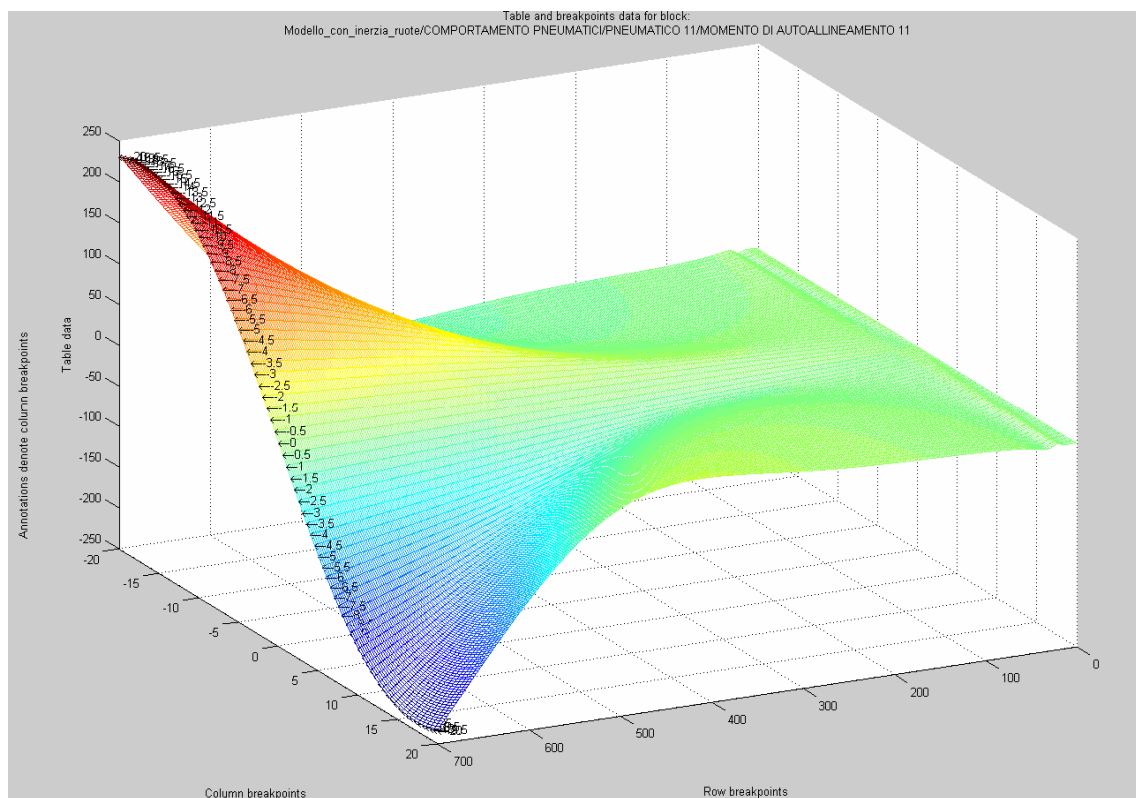


Fig 3.12 – Superficie di momento di autoallineamento (in lb.ft)

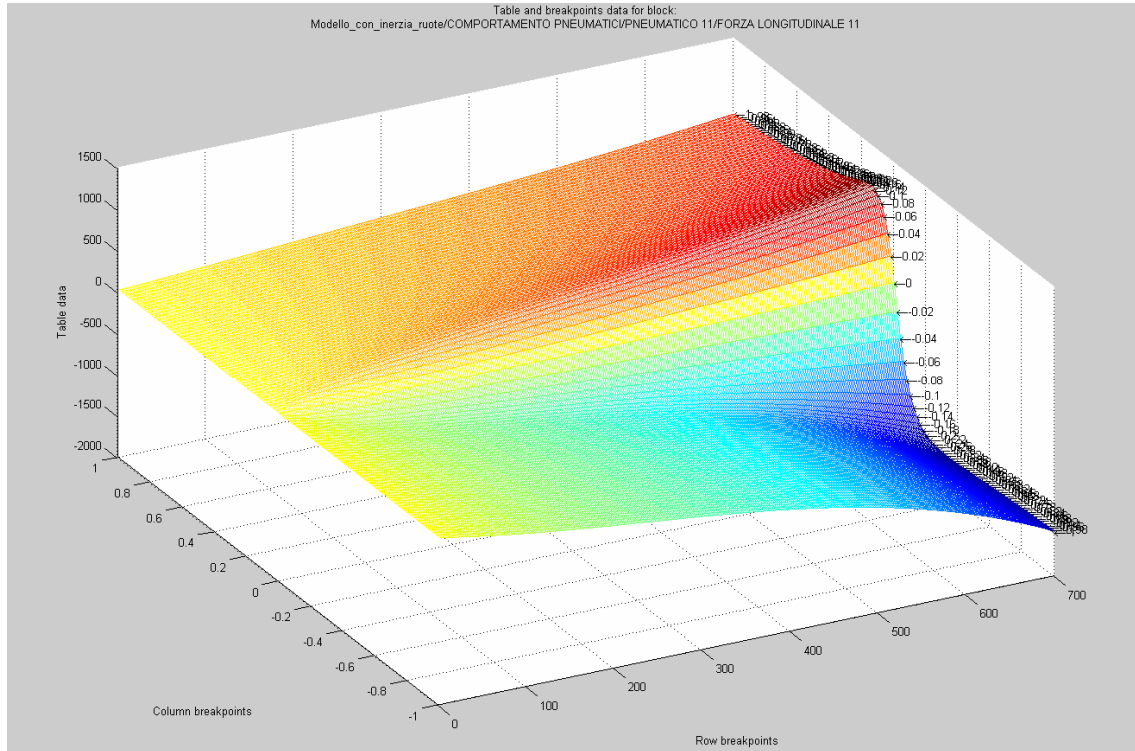


Fig 3.13 – Superficie di forza longitudinale (in lb)

L'unico aspetto non ottenibile dalle curve fornite dal *TTC* è l'andamento del momento di rotolamento M_y . Per ovviare al problema è stata introdotta, all'interno di entrambi i modelli, una relazione costitutiva che definisce il momento di rotolamento.

Per il modello di monoposto FSAE con inerzia delle ruote viene utilizzato il segnale di velocità angolare delle ruote, mentre per il modello senza inerzia ruote si procede in modo diverso.

In entrambi i casi però è necessario utilizzare l'analogia con la forza di resistenza introdotta dal rotolamento.

Per il modello che prevede l'inerzia delle ruote è possibile scrivere l'equilibrio delle potenze motrici e resistenti agenti sulla ruota.

$$F_r \cdot v = M_y \cdot \omega \quad (3.31)$$

dove M_y è il momento di rotolamento e F_r è la forza resistente che nasce sulla ruota, la cui espressione è

$$F_r = P(f_0 + kv^2) \quad (3.32)$$

Essendo $v = \omega \cdot R$, può essere esplicitata l'espressione del momento di rotolamento M_y :

$$M_y = RP(f_0 + kR^2\omega^2) \quad (3.33)$$

che scritta in forma compatta diventa

$$M_y = P(M_{y0} + k_\omega\omega^2) \quad (3.34)$$

dove i singoli coefficienti sono

$$M_{y0} = Rf_0 \quad k_\omega = R^3k \quad (3.35)$$

Nel caso invece di modello FSAE privo di inerzia delle ruote, il momento di rotolamento dei pneumatici viene determinato senza passare dalle velocità angolari delle ruote, peraltro non presenti come grandezze associate al veicolo.

In questo caso l'equilibrio a rotazione delle ruote impone che

$$F_r \cdot R = F_z \cdot \delta \quad (3.36)$$

dove δ è l'eccentricità della forza verticale rispetto all'asse ruota.

Essendo $F_r = P(f_0 + kv^2)$ e $F_z \cdot \delta = M_y$, si ha

$$M_y = PR(f_0 + kv^2) \quad (3.37)$$

che riscritta in forma compatta diventa

$$M_y = P(M_{y0} + k_v v^2) \quad (3.38)$$

dove i singoli contributi sono

$$M_{y0} = Rf_0 \quad k_v = Rk \quad (3.39)$$

Da precisare che le velocità v di cui si parla sono quelle parallele al piano stradale ed ortogonali agli assi ruota. Ecco quindi determinate le espressioni del momento di rotolamento per entrambi i modelli.

3.5 Struttura Matriciale e Linearizzazione delle Equazioni Cardinali

Come per il precedente modello, è adesso necessario riordinare tutte le equazioni e linearizzare tutte quello che non è ancora stato semplificato.

Per quanto riguarda la cassa valgono esattamente le considerazioni fatte nel precedente modello. L'unica cosa da precisare è la modifica dell'algoritmo di linearizzazione delle grandezze non apporta modifiche alle equazioni di equilibrio della cassa.

Questo è dovuto al fatto che le compressioni, le velocità e le accelerazioni radiali non compaiono nella stesura dell'equilibrio.

Per le ruote invece la situazione è leggermente diversa a livello formale, ma molto diversa a livello analitico.

Rispetto al modello già trattato la differenza concettuale è nell'imporre il loro equilibrio attraverso le seguenti equazioni.

Indicando ancora con il pedice ij la generica ruota, ma considerando che nella realtà le masse delle ruote anteriori sono uguali tra loro, analogamente al posteriore, si possono ora formulare le 6 equazioni di equilibrio linearizzate.

- Prima equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{P}_{ij} - \mathbf{F}_{cij} + \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{i}_c] = \text{SviluppoInSerie}[m_{ij} \mathbf{a}_{cij} \cdot \mathbf{i}_c] \quad (3.40)$$

- Seconda equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{P}_{ij} - \mathbf{F}_{cij} + \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{j}_c] = \text{SviluppoInSerie}[m_{ij} \mathbf{a}_{cij} \cdot \mathbf{j}_c] \quad (3.41)$$

- Terza equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{P}_{ij} - \mathbf{F}_{cij} + \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{k}_c] = \text{SviluppoInSerie}[m_{ij} \mathbf{a}_{cij} \cdot \mathbf{k}_c] \quad (3.42)$$

- Quarta equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{cij} + \mathbf{C}_{ij} \mathbf{P}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{i}_c] = \text{SviluppoInSerie}[\dot{\mathbf{L}}_{cij} \cdot \mathbf{i}_c] \quad (3.43)$$

- Quinta equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{cij} + \mathbf{C}_{ij}\mathbf{P}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{j}_c] = \text{SviluppoInSerie}[\dot{\mathbf{L}}_{cij} \cdot \mathbf{j}_c] \quad (3.44)$$

- Sesta equazione di equilibrio

$$\text{SviluppoInSerie}[(\mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{cij} + \mathbf{C}_{ij}\mathbf{P}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}) \cdot \mathbf{k}_c] = \text{SviluppoInSerie}[\dot{\mathbf{L}}_{cij} \cdot \mathbf{k}_c] \quad (3.45)$$

Ovviamente è improponibile riportare il risultato del processo di linearizzazione a causa di una certa complessità analitica.

In ogni caso, proprio per aver scelto di fare il prodotto scalare con i versori della terna solidale alla cassa, in tutte le equazioni compaiono evidentemente le componenti delle forze e dei momenti agenti nei centri ruota nella direzione del versore scelto.

Ad accompagnare le 24 equazioni che derivano da quanto riportato sopra, ci sono, anche in questo caso, 4 equazioni di equilibrio aggiuntive, la cui formulazione è la stessa del modello già descritto

$$\mathbf{M}_{cij} \cdot \mathbf{j}_{ij} = -C_{ij}$$

il cui risultato, facendo tutte le dovute sostituzioni delle azioni a centro ruota è:

$$Fx_{ij} \cdot (R_i - h_{ij}) = C_{ij} - I_a \dot{\omega}_{ij} + My_{ij} + (Mz_{ij} - I_a \ddot{\psi}) \cdot (\gamma_{ij} + \phi) \quad (3.46)$$

Per giungere alla forma matriciale del sistema di equazioni, il primo passo è quindi attuare nuovamente il processo di sostituzione delle azioni al centro ruota, tutte ricavabili proprio dalle equazioni appena scritte, nelle 6 equazioni di equilibrio della cassa.

Il procedimento è ovviamente affidato di nuovo al Software per consueti motivi di eccessiva complessità analitica.

A questo punto si riapre nuovamente il problema del conteggio delle equazioni e delle incognite.

Per quanto riguarda la cassa del veicolo, non ci sono ovviamente né equazioni aggiuntive, né incognite aggiuntive. Da ricordare che le incognite sono solo e soltanto tutte le grandezze che compaiono con ordine massimo di derivazione.

La presenza delle ruote introduce 8 incognite in più rispetto al precedente modello. Analizzando infatti le 24 equazioni appena formulate, quello che compare in più rispetto a prima sono i termini inerziali alla destra del segno di uguale.

Al loro interno compaiono complessivamente 20 grandezze a priori incognite che sono raggruppabili nel seguente vettore

$$\mathbf{x} = (\omega_{11} \quad \omega_{12} \quad \omega_{21} \quad \omega_{22} \quad \dot{\omega}_{11} \quad \dot{\omega}_{12} \quad \dot{\omega}_{21} \quad \dot{\omega}_{22} \quad h_{11} \quad h_{12} \quad h_{21} \quad h_{22} \quad \dot{h}_{11} \quad \dot{h}_{12} \quad \dot{h}_{21} \quad \dot{h}_{22} \quad \ddot{h}_{11} \quad \ddot{h}_{12} \quad \ddot{h}_{21} \quad \ddot{h}_{22})^T \quad (3.47)$$

Considerando solo quelle che presentano l'ordine massimo di derivazione, le vere incognite aggiuntive associate alla presenza delle ruote sono quindi raggruppate nel vettore sottostante:

$$\mathbf{x}_R = (\dot{\omega}_{11} \quad \dot{\omega}_{12} \quad \dot{\omega}_{21} \quad \dot{\omega}_{22} \quad \ddot{h}_{11} \quad \ddot{h}_{12} \quad \ddot{h}_{21} \quad \ddot{h}_{22})^T \quad (3.48)$$

In realtà, le forze verticali a terra $F_{z_{ij}}$ agenti sui pneumatici possono non essere considerate come incognite ed uscire quindi dal vettore delle incognite citato nel modello di veicolo senza inerzia delle ruote.

Il motivo è la presenza delle equazioni costitutive dei pneumatici che definiscono legami ben precisi tra le forze verticali e le grandezze h_{ij} e le derivate prime di h_{ij} .

Nella forma più semplice, anch'essa linearizzata, le forze verticali devono rispettare equazioni costitutive del tipo

$$F_{z_{ij}} = Kp \cdot h_{ij} + Cp \cdot \dot{h}_{ij} \quad (3.49)$$

dove con Kp e Cp si sono indicati rispettivamente rigidità radiale del pneumatico e relativo coefficiente di smorzamento.

Poiché le compressioni e le velocità di compressione sono ricavabili dalle accelerazioni, il calcolo delle forze verticali può essere fatto in modo indipendente.

Per ridurre le dimensioni del sistema algebrico finale, ogni singola equazione quindi non prenderà parte al sistema di equazioni dove invece devono comparire tutte quelle che presentano al loro interno le vere incognite.

Un'altra importante parentesi da aprire è quella relativa alle forze longitudinali.

Nel modello di veicolo senza inerzia delle ruote, le forze longitudinali, incognite a priori, sono state ricavate dalle 4 equazioni di equilibrio aggiuntive delle ruote, leganti l'intensità della coppia erogata sull'asse ruota a quella motrice / frenante.

Non a caso è stato detto che tali equazioni, alla fine dei conti, non contribuivano all'ottenimento del numero necessario per risolvere il problema.

In questo caso invece le forze longitudinali sono note, come lo sono (e lo erano nel precedente modello) quelle laterali, grazie alle equazioni costitutive dei pneumatici in direzione longitudinale e laterale.

In questo attuale modello infatti è prelevabile il segnale di velocità angolare delle ruote, dunque è calcolabile lo scorrimento e conseguentemente la forza longitudinale.

Per questi motivi, le equazioni aggiuntive di equilibrio delle ruote, portano informazioni necessarie per la risoluzione del sistema globale.

L'ultima parentesi da aprire è relativa alle equazioni costitutive delle sospensioni che ovviamente rimangono esattamente le stesse, perché insensibili alla presenza delle ruote.

A questo punto non rimane che conteggiare il numero di equazioni da risolvere contemporaneamente e il numero di incognite.

Le equazioni complessivamente scritte sono:

- 6 per l'equilibrio della cassa
- 28 per l'equilibrio delle ruote, di cui 4 “ausiliarie”
- 4 di tipo costitutivo delle sospensioni

Per quanto detto dunque, le 24 equazioni di equilibrio delle ruote lungo i versori del riferimento cassa servono per ricavare le azioni a centro ruota e quindi devono uscire dal conteggio.

Rimangono così 14 equazioni all'interno delle quali compaiono le vere incognite.

Avendo escluso le forze verticali a terra dal vettore delle incognite ed avendone invece introdotte 8 legate alla presenza delle ruote, il conteggio finale delle incognite con grado massimo di derivazione è quindi 14.

Raggruppandole tutte nel nuovo vettore si ha

$$\mathbf{X} = \left(\dot{u} \quad \dot{v} \quad \ddot{h} \quad \ddot{\psi} \quad \ddot{\phi} \quad \ddot{\theta} \quad \dot{\omega}_{11} \quad \dot{\omega}_{12} \quad \dot{\omega}_{21} \quad \dot{\omega}_{22} \quad \ddot{h}_{11} \quad \ddot{h}_{12} \quad \ddot{h}_{21} \quad \ddot{h}_{22} \right)^T$$

Il sistema di dimensione 14 può quindi essere risolto.

Come fatto precedentemente, è comodo fornirne la struttura matriciale, attraverso la nuova matrice dei coefficienti \mathbf{Ac} ed il nuovo vettore degli ingressi \mathbf{Bc} . Ovviamente le dimensioni sono aumentate di 4 unità, dunque non è proponibile riportare in questa sede le loro espressioni, peraltro molto più complesse per la presenza del contributo inerziale delle ruote. Conoscendo il vettore \mathbf{X} al generico istante di tempo t , è possibile, per integrazione singola o doppia, ricostruire tutti i profili di velocità e/o posizione, dunque aggiornare continuamente la matrice e il vettore.

4 Simulazioni

In questo capitolo vengono riportati i risultati delle simulazioni relative alle manovre più comuni che la monoposto effettua.

La logica adottata è quella di confrontare, sullo stesso piano, l'andamento di una qualsiasi grandezza appartenente in un caso al modello di monoposto FSAE senza inerzia delle ruote, mentre nell'altro a quello di vettura con inerzia ruote.

In realtà, l'utilizzo del modello di monoposto senza inerzia delle ruote, consente di simulare altre due configurazioni della distribuzione di massa e momento di inerzia della vettura.

Le simulazioni effettuate per ogni manovra sono quindi 4.

Per distinguere gli andamenti si utilizza, per tutte le grandezze, una convenzione sui colori.

Gli andamenti in verde sono relativi al modello FSAE senza inerzia delle ruote, quelli in rosso al modello FSAE con inerzia delle ruote, quelli in blu al modello FSAE senza inerzia delle ruote nel quale si corregge il momento di inerzia I_{czz} della cassa, mentre quelli in marrone indicano le grandezze del modello senza inerzia delle ruote nel quale si correggono sia la massa che il momento di inerzia della cassa.

La correzione del momento di inerzia della cassa prevede di aggiungere al valore effettivo il contributo introdotto dalle masse delle ruote, posizionate a distanze note dall'asse Z_c .

Questo è facilmente ottenibile dall'applicazione del *Teorema di Steiner* aggiungendo al termine I_{czz} l'espressione

$$2(m_1(a_1^2 + t_1^2) + m_2(a_2^2 + t_2^2)) \quad (4.1)$$

La correzione della massa invece prevede di considerare tutta la massa del veicolo disposta sulla cassa con la stessa ripartizione dei pesi. Di seguito è riportato l'elenco dei dati utilizzati per effettuare le simulazioni. Alcuni di questi provengono dalle simulazioni effettuate in ambiente ADAMS, altri sono stati forniti da chi si è occupato del layout vettura. L'elenco deriva direttamente dal file MATLAB di definizione dei parametri veicolo.

- $m=252.8$ Kg % massa cassa
- $m_1=16$ Kg % massa singola non sospesa anteriore
- $m_2=12.6$ Kg % massa singola non sospesa posteriore
- $I_{cxx}=44.1$ Kg m² % momento d'inerzia intorno all'asse x (vedi dati ET1)
- $I_{cyy}=135.75$ Kg m² % momento d'inerzia intorno all'asse y (vedi dati ET1)
- $I_{czz}=146.71$ Kg m² % momento d'inerzia intorno all'asse z (vedi dati ET1)

- $I_{cxz}=3.2 \text{ Kg m}^2$ % momento d'inerzia centrifugo (vedi dati ET1)
- $I_d=0.2 \text{ Kg m}^2$ % momento d'inerzia intorno all'asse x o z (diametrale) ipotesi
- $I_a=0.4 \text{ Kg m}^2$ % momento d'inerzia intorno all'asse y (assiale) ipotesi
- $a_1=0.776 \text{ m}$ % semipasso anteriore
- $a_2=0.824 \text{ m}$ % semipasso posteriore
- $L=1.6 \text{ m}$ % passo veicolo
- $t_1=0.6 \text{ m}$ % semicarreggiata anteriore
- $t_2=0.55 \text{ m}$ % semicarreggiata posteriore
- $R_1=0.253 \text{ m}$ % raggio di rotolamento dei pneumatici anteriori scarichi
- $R_2=0.253 \text{ m}$ % raggio di rotolamento dei pneumatici posteriori scarichi
- $g=9.81 \text{ m/s}^2$ % campo gravitazionale
- $c_{12}=3750 \text{ Ns/m}$ % coefficiente di smorzamento anteriore a centro ruota
- $c_{22}=3750 \text{ Ns/m}$ % coefficiente di smorzamento posteriore a centro ruota
- $dy_{11}=-0.08$ % gradiente di spostamento laterale del centro ruota 11
- $dy_{12}=0.08$ % gradiente di spostamento laterale del centro ruota 12
- $dy_{21}=-0.08$ % gradiente di spostamento laterale del centro ruota 21
- $dy_{22}=0.08$ % gradiente di spostamento laterale del centro ruota 22
- $d_gamma_v11=-0.024$ % gradiente di camber 11 con l'angolo di sterzo volante
- $d_gamma_v12=-0.024$ % gradiente di camber 12 con l'angolo di sterzo volante
- $k_p=781000 \text{ N/m}$ % rigidezza dei pneumatici
- $c_p=500 \text{ Ns/m}$ % coefficiente di smorzamento dei pneumatici
- $\tau=4.386$ % gradiente di convergenza con l'angolo di sterzo volante
- $K_f=1$ % rapporto tra le pressioni del circuito frenante
- $\tau_c=0.5208 \text{ (II)}$ % rapporto di trasmissione al cambio
- $\tau_f=15/36$ % rapporto di trasmissione finale
- $K_{p1}=10$ % costante di guadagno statico sull'impianto frenante anteriore
- $K_{p2}=5$ % costante di guadagno statico sull'impianto frenante posteriore
- $\tau=0.209 \text{ mm/}^\circ$ % rapporto di sterzo alla cremagliera
- $K_{fi_eq_post}=2 \text{ N/mm}$ % Rapporto tra forza a centro ruota (N) e spostamento relativo (mm) dei centri ruota dovuto alla barra di torsione al posteriore
- $K_{fi_eq_ant}=2 \text{ N/mm}$ % Rapporto tra forza a centro ruota (N) e spostamento relativo (mm) dei centri ruota dovuto alla barra di torsione all'anteriore

- $h_0=0.3 \text{ m}$ % Altezza iniziale del baricentro cassa da terra
- $f_0=0.0015$ % Contributo statico alla resistenza di rotolamento
- $k=0.0000065 \text{ s}^2/\text{m}^2$ % Contributo dinamico alla resistenza di rotolamento
- $\rho_0=1.27 \text{ Kg} / \text{m}^3$ % Densità dell'aria nelle condizioni ambiente
- $S=1\text{m}^2$ % Sezione frontale del veicolo
- $C_x=0.5$ % Coefficiente di resistenza aerodinamica

4.1 Fase di accelerazione longitudinale

In questa fase si simula la manovra più semplice che la monoposto effettua. Le ipotesi sono quelle di velocità iniziale pari a 1 m/s , è legge di coppia motrice ad “alzata di valvola”.

L'unico ingresso quindi è la coppia motrice che ha il seguente andamento.

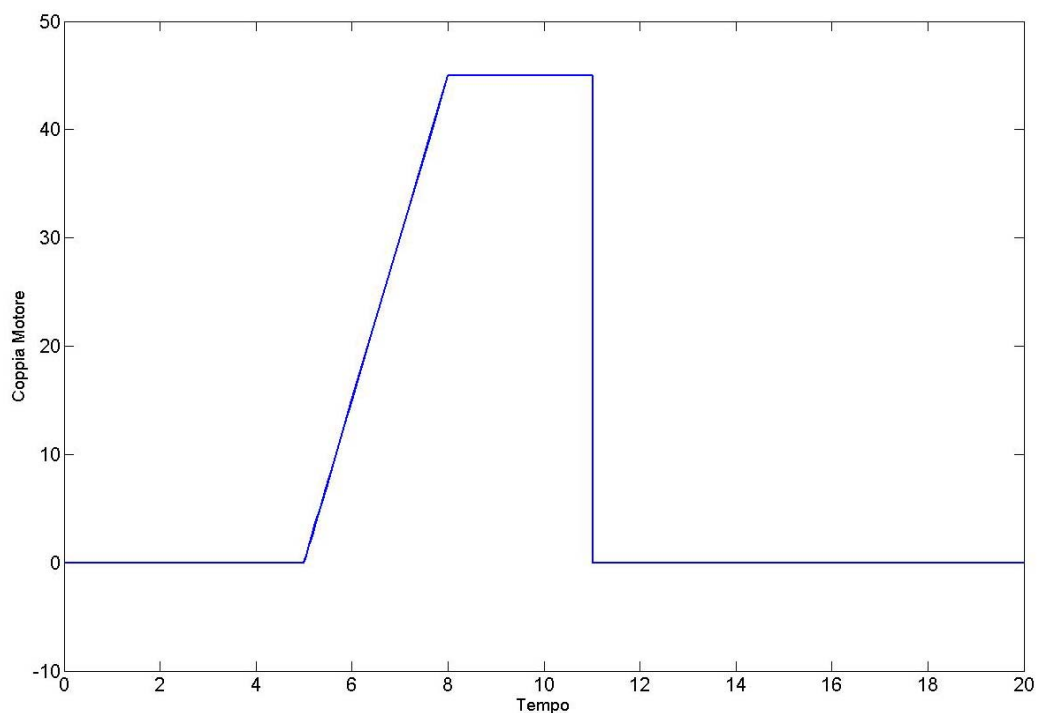


Fig 4.1 – Andamento della coppia motrice M_m (Nm) in funzione del tempo

Le grandezze che in teoria possono essere rappresentate sono molte. Alcune di queste però non hanno un vero e proprio significato, quindi si riportano solo quelle più interessanti.

Cominciando dall'accelerazione longitudinale, si riscontra una netta differenza tra il modello di monoposto con inerzia delle ruote e senza, da attribuire ovviamente ad una massa apparente traslante nettamente superiore nel caso di modello completo.

Delle due successive combinazioni, quella con inerzie effettive ma momento I_{xx} modificato ricalca esattamente la curva verde, mentre quella marrone si dispone tra la rossa e la verde/blu a causa di una massa apparente traslante pari esattamente alla massa del veicolo.

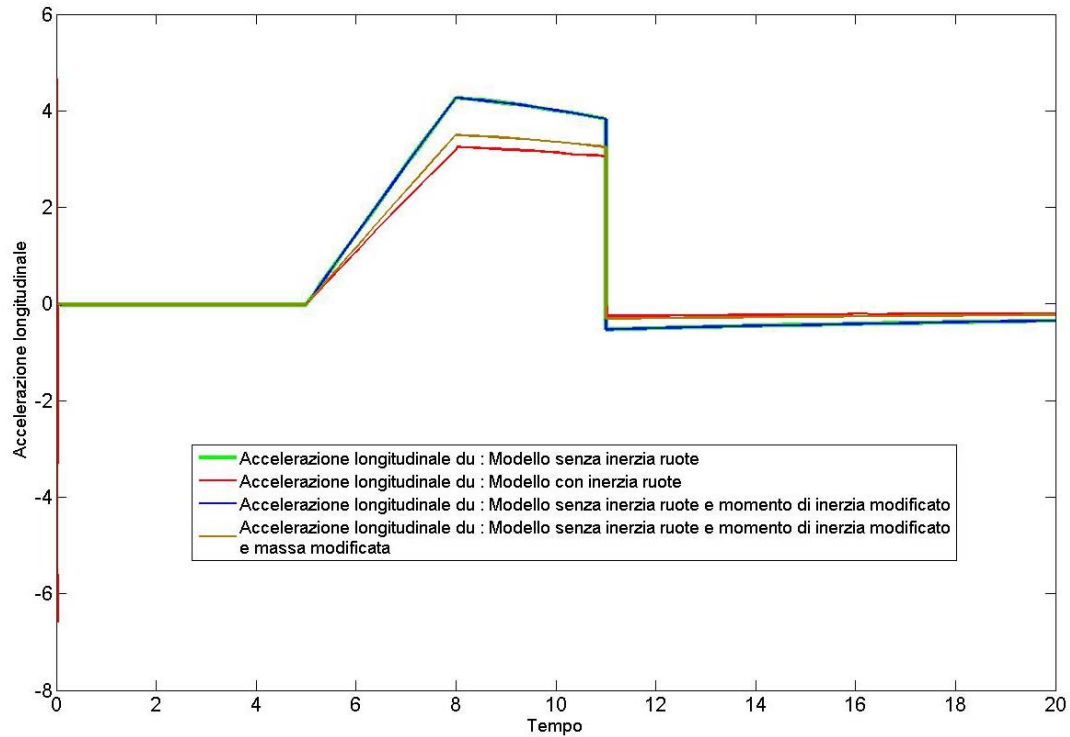


Fig 4.2 – Andamento dell'accelerazione longitudinale per le varie combinazioni di massa e momenti di inerzia (m/s^2)

Proseguendo, si riporta l'andamento della velocità longitudinale nei 4 casi. Anche per questi andamenti valgono le stesse considerazioni appena fatte, essendo le nuove funzioni l'integrale di quelle vecchie.

Successivamente è poi rappresentato l'andamento dell'angolo di beccheggio, solo per 3 configurazioni, escludendo quella che modifica solo il momento d'inerzia I_{xx} .

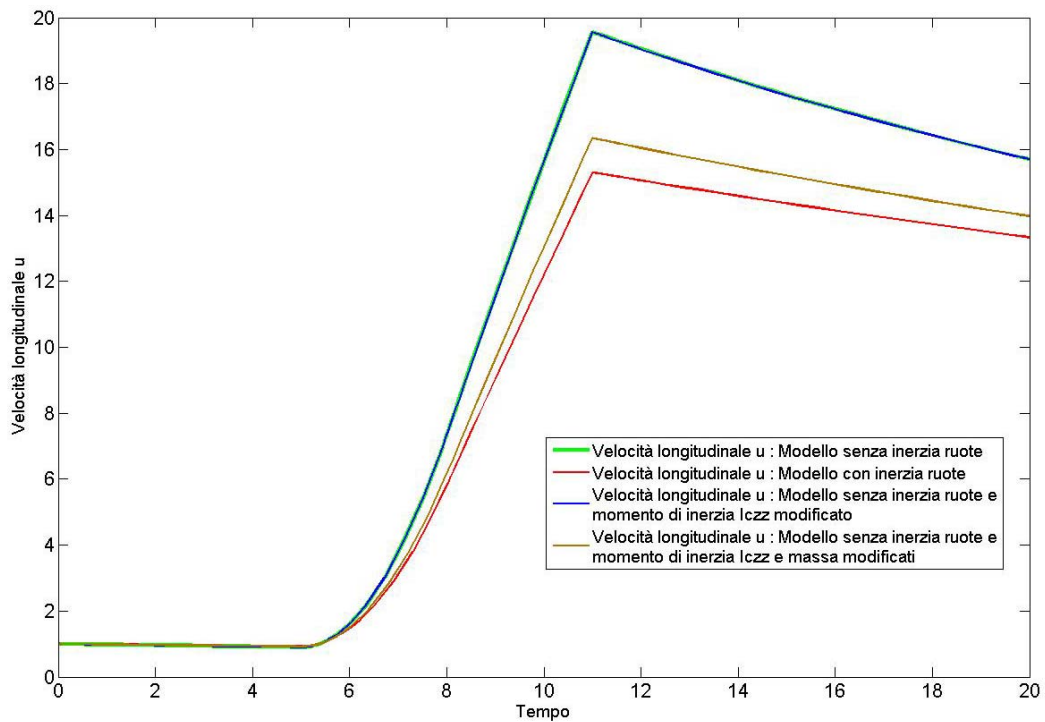


Fig 4.3 – Andamento della velocità longitudinale (m/s)

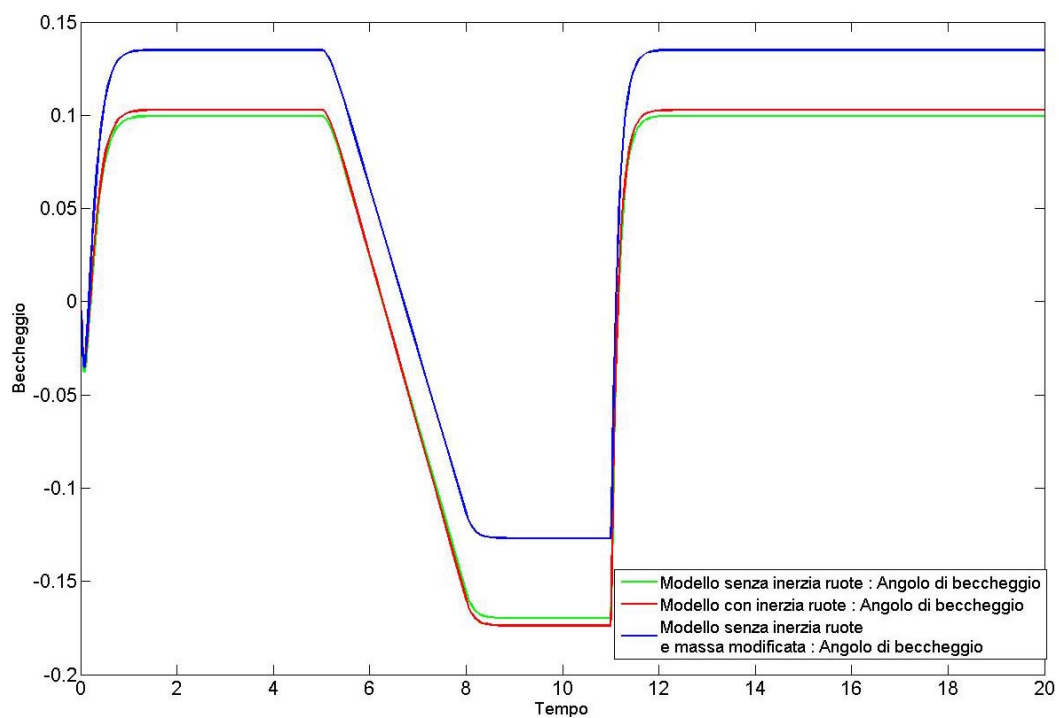


Fig 4.4 – Andamento dell'angolo di beccheggio (°)

Nel caso dell'angolo di beccheggio, quello che si riscontra è semplicemente una differenza nei valori dovuto alla diversa altezza del baricentro della cassa da terra. La forma delle curve rimane invece la stessa. In ultimo si riporta l'andamento dell'altezza del baricentro da terra.

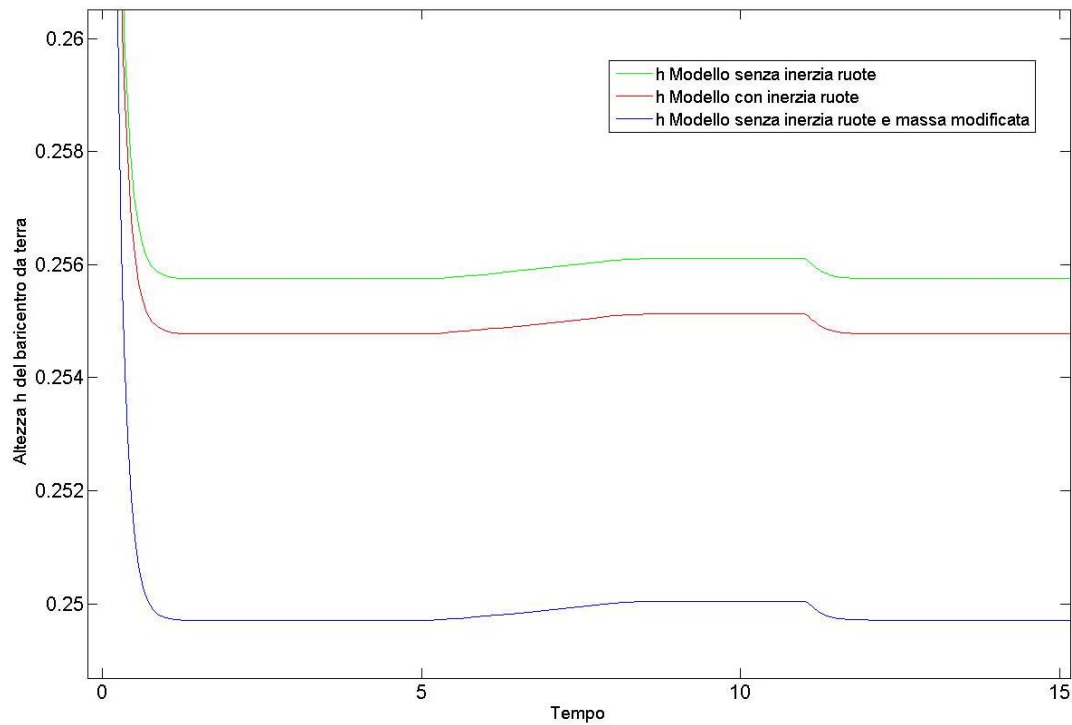


Fig 4.5 – Andamento dell'altezza del baricentro cassa da terra (m)

Come per il beccheggio, il gap è da imputare alla diversa massa sospesa e alla comprimibilità radiale del pneumatico.

La prima introduce una differenza tra la curva verde e quella blu, mentre il secondo aspetto introduce una differenza tra la curva rossa e quella verde.

Nella prima parte è visibile la fase di assestamento iniziale tipica di tutte le manovre. La condizione iniziale imposta infatti sull'altezza del baricentro è 0.3 m .

Da notare come il moto del baricentro non sia molto sensibile al beccheggio, conseguenza sia di una particolare rigidità al moto di beccheggio che di una localizzazione del centro di beccheggio in prossimità del baricentro.

Le coordinate Lagrangiane b e θ sono quindi quasi indipendenti.

Per concludere la trattazione della manovra di accelerazione con profilo di coppia noto, si riportano gli andamenti dei carichi verticali per ruota agenti sui due assali.

In questo caso si è esaminato solo l'andamento per modello senza inerzia ruote con massa della cassa modificata e modello con inerzia ruote.

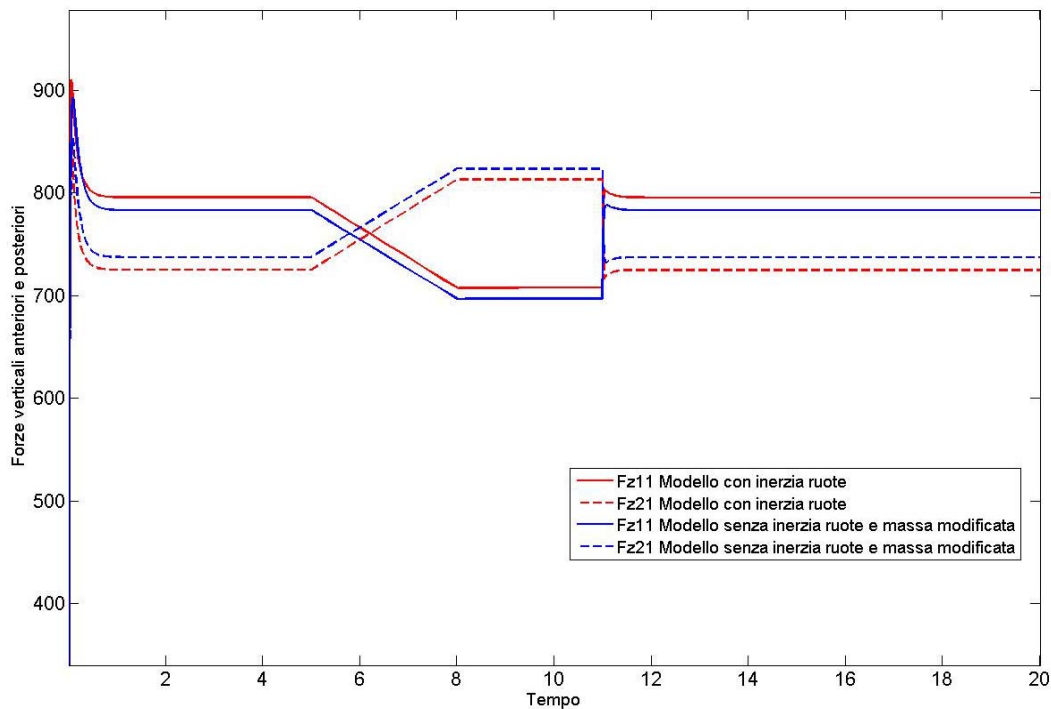


Fig 4.6 – Carichi per ruota sugli assali (N)

In entrambi gli andamenti quello che si riscontra è un semplice gap tra le curve.

Sull'assale anteriore la forza verticale è superiore nel caso di modello con inerzia delle ruote, mentre su quello posteriore accade il contrario.

Il motivo risiede nella ripartizione dei pesi. Nel modello che non prevede l'inerzia delle ruote, i pesi sono ripartiti secondo la definizione dei semipassi.

Nel modello che prevede invece l'inerzia delle ruote, oltre alla ripartizione dei pesi secondo i semipassi, si aggiungono i pesi delle masse non sospese che differiscono di circa 30 N. Di conseguenza, i carichi sugli assali sono differenti. In particolare, all'anteriore la curva rossa supera quella blu e al posteriore viceversa, proprio perché le masse non sospese all'anteriore sono superiori di quelle al posteriore.

Come si può vedere però, tolto il gap, gli andamenti sono decisamente gli stessi.

- **Simulazione di una fase di accelerazione con perdita di aderenza al posteriore**

Ai fini della logica di controllo della partenza, è interessante simulare una partenza particolarmente brusca della monoposto, per vedere in quali condizioni è necessario adottare il traction control.

L'ipotesi è quella di imporre, con un certo ritardo per escludere il transitorio, una coppia motrice che segue una rampa particolarmente ripida fino ad arrivare al valore di coppia massima. Il motore della attuale monoposto ET1 eroga una coppia massima che sicuramente non supera i 60 Nm, anche nelle migliori ipotesi di prestazione.

La simulazione prevede una partenza da una velocità iniziale di 1 m/s in prima marcia e con rapporto di trasmissione finale (pignone/corona) di 15/48.

Il profilo di coppia che realisticamente è erogabile, sfruttando anche l'effetto inerziale del motore, al regime di coppia massima nelle prime fasi della partenza è il seguente:

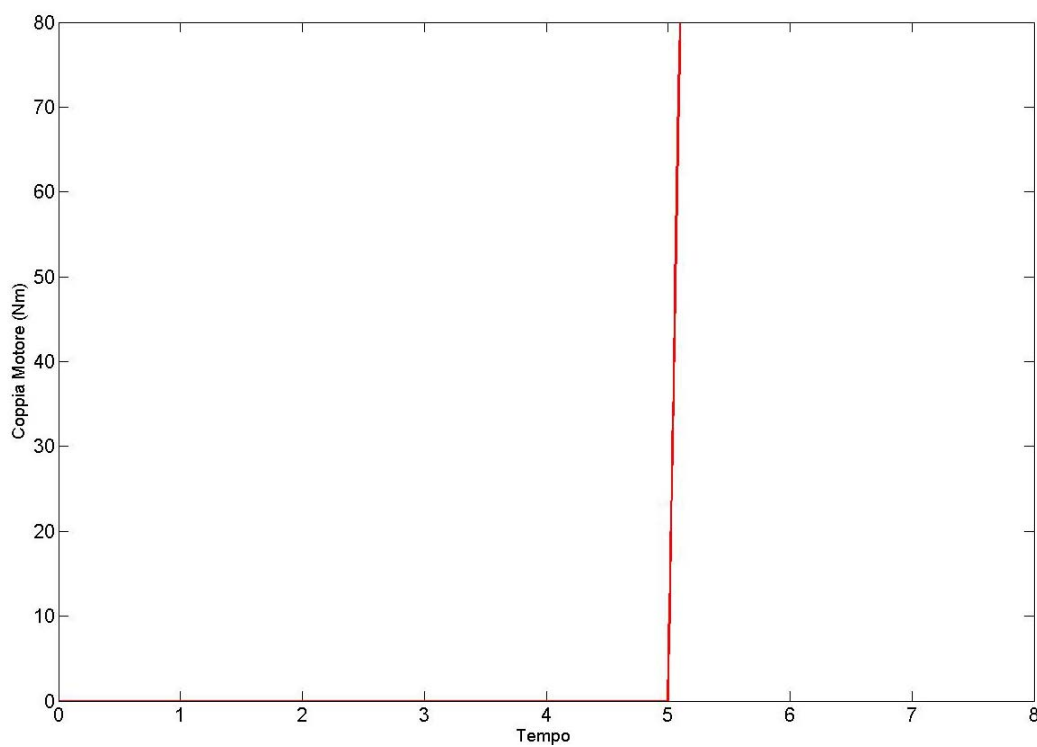


Fig 4.7 – Profilo di coppia in una partenza brusca

Il motore quindi sviluppa una coppia massima di 80 Nm raggiungendola in 0.2 s. In questo modo si tiene conto dell'effetto inerziale introdotto dalla decelerazione delle masse alterne e rotanti e del transitorio meccanico di chiusura della frizione.

Lo scorrimento delle ruote posteriori durante la partenza indotta dal profilo visto, ha l'andamento seguente

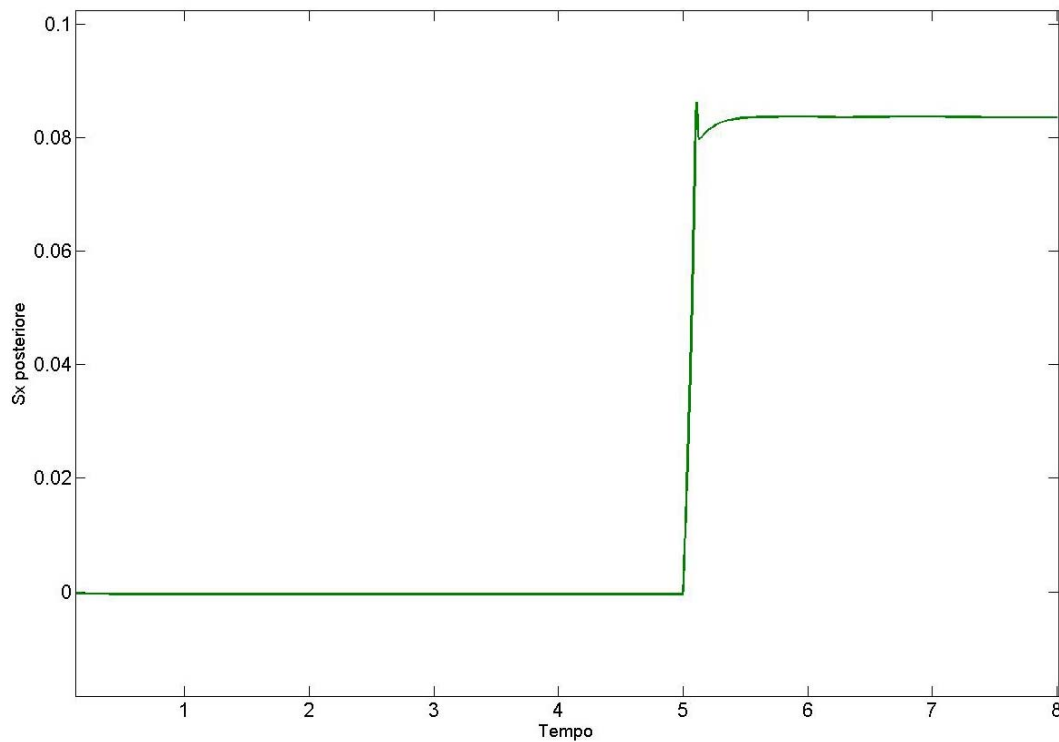


Fig 4.8 – Andamento dello scorrimento delle ruote posteriori nella fase di accelerazione

I pneumatici attualmente montati sulla monoposto hanno uno scorrimento che fornisce il massimo di forza di circa 0.1 in condizioni di trazione e 0.2 in condizioni di frenata.

Con una coppia motrice massima inferiore a 80 Nm non sussiste il problema della perdita di aderenza al posteriore, perché come visto, il picco di scorrimento rimane sotto il valore critico. Per determinare la condizione che comporta il superamento dello scorrimento critico si sono fatte altre simulazioni imponendo il raggiungimento di un valore di coppia gradualmente superiore a quello citato.

Il risultato che si ottiene è che una rampa di coppia che raggiunge il valore di 90 Nm, porta allo slittamento definitivo delle ruote posteriori.

L'andamento della velocità angolare delle ruote posteriori quando il motore eroga la coppia che si è detto, è divergente perché superato il picco di forza, il motore continua a erogare la coppia voluta e non c'è più modo di equilibrare le ruote.

La simulazione viene automaticamente arrestata. Fino all'istante citato l'andamento delle velocità angolari delle ruote posteriori è visibilmente divergente.

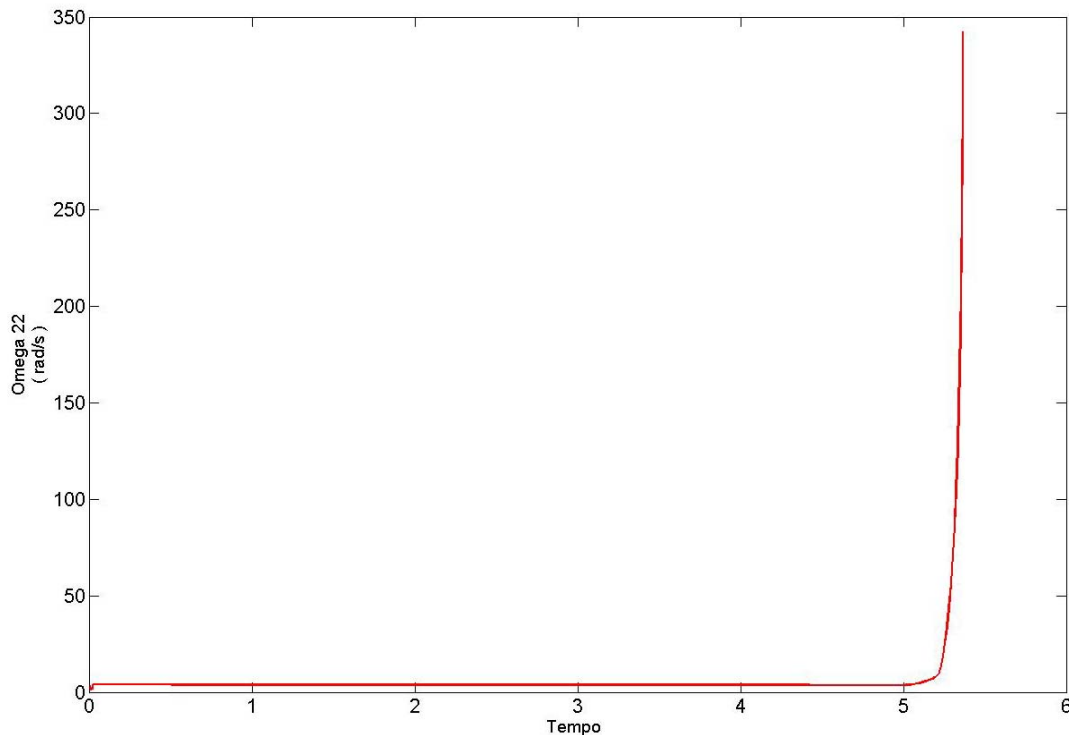


Fig 4.9 – Andamento della velocità angolare delle ruote posteriori
nel caso di perdita di aderenza senza controllo

Per evitare la perdita di aderenza, è per esempio ipotizzabile di introdurre un controllo di trazione che regola la coppia motrice secondo una logica ad inseguimento di uno scorrimento voluto.

La coppia erogata dal motore sarà quindi proporzionale, tramite un opportuno guadagno, alla differenza che vige tra lo scorrimento che si vuole raggiungere e quello effettivo. La relazione che definisce la coppia erogata dal motore è quindi

$$M_m = K \cdot (Sx_{riferimento} - Sx_{effettivo}) \quad (4.2)$$

All'istante iniziale quindi il motore eroga la massima coppia perché è massima la differenza tra scorrimento voluto e scorrimento effettivo (pari infatti a zero).

L'erogazione della coppia comporta nascita di scorrimenti, dunque di forze. All'aumentare dello scorrimento quindi, la differenza tra quello voluto e quello effettivo diminuisce, la coppia scende e il sistema si stabilizza ad uno scorrimento di equilibrio.

Se infatti lo scorrimento aumenta di nuovo, la coppia scende e viceversa, oscillando pertanto intorno al punto di equilibrio precedentemente trovato.

Imponendo come scorrimento di riferimento un valore di 0.15, e un guadagno di 1500, quello che si ottiene nella fase di partenza sono i seguenti andamenti

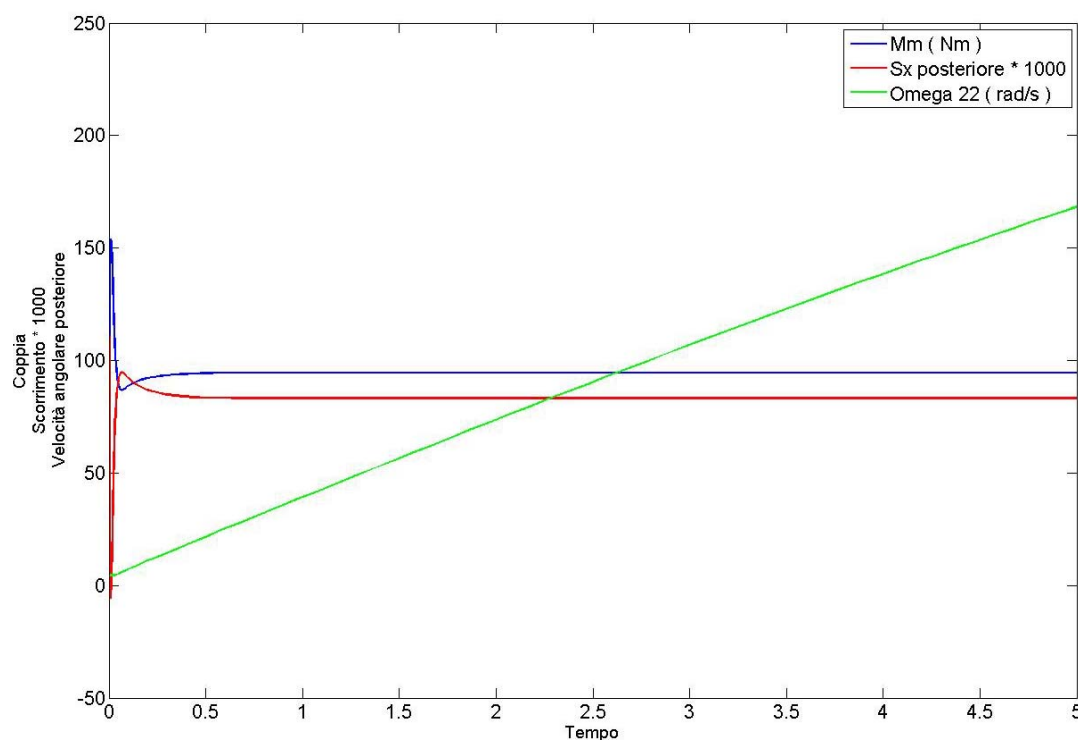


Fig 4.10 – Andamento della coppia motore, dello scorrimento e della velocità angolare delle ruote posteriori nel caso di partenza con controllo di trazione ad inseguimento di scorrimento

Dalla simulazione emerge come, per mantenere lo scorrimento di circa 0.1, sia necessario che il motore eroghi una coppia di circa 95 Nm con il rapporto di trasmissione più corto possibile (prima marcia).

All'istante iniziale la coppia erogata è certamente eccessiva, ma anche a regime il motore attuale non riuscirà mai a sviluppare 95 Nm.

Ulteriori simulazioni con gradino netto di coppia definiscono finalmente quale è il valore limite di coppia istantanea che mantiene stabile l'equilibrio della ruota.

Con un gradino di coppia di 73 Nm l'andamento dello scorrimento delle ruote posteriori è il seguente

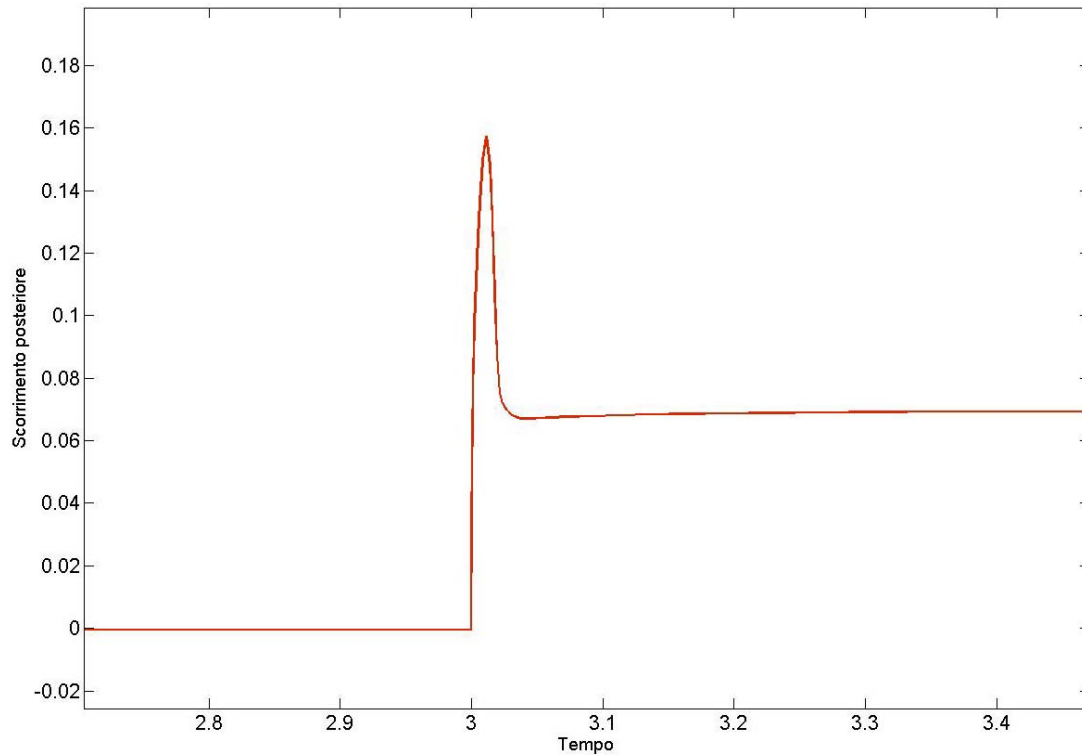


Fig 4.11 – Scorrimento delle ruote posteriori nel caso di gradino di coppia di 73 Nm motore

Passando a 75 Nm si ha l'incremento di coppia sufficiente per rendere instabile il sistema. Viene infatti superato lo scorrimento limite e la forza di trazione non è più in grado di equilibrare la coppia.

Ecco quindi determinato il valore di coppia limite nel caso di risposta al gradino o di risposta del sistema alla rampa.

In ogni caso si tratta di coppia considerevoli per il motore in esame.

Il problema della perdita di aderenza al posteriore quindi nasce solo in condizioni abbastanza particolari.

4.2 Manovra di Sine Sweep

In questa manovra il pilota agisce sull'angolo di sterzo volante, imponendogli un moto sinusoidale periodico con ampiezza nota. L'ipotesi è che il pilota effettui la manovra con una frequenza di 1 Hz, e un'ampiezza di 30° , partendo da una velocità iniziale di 15 m/s .

L'andamento temporale del segnale forzante è il seguente.

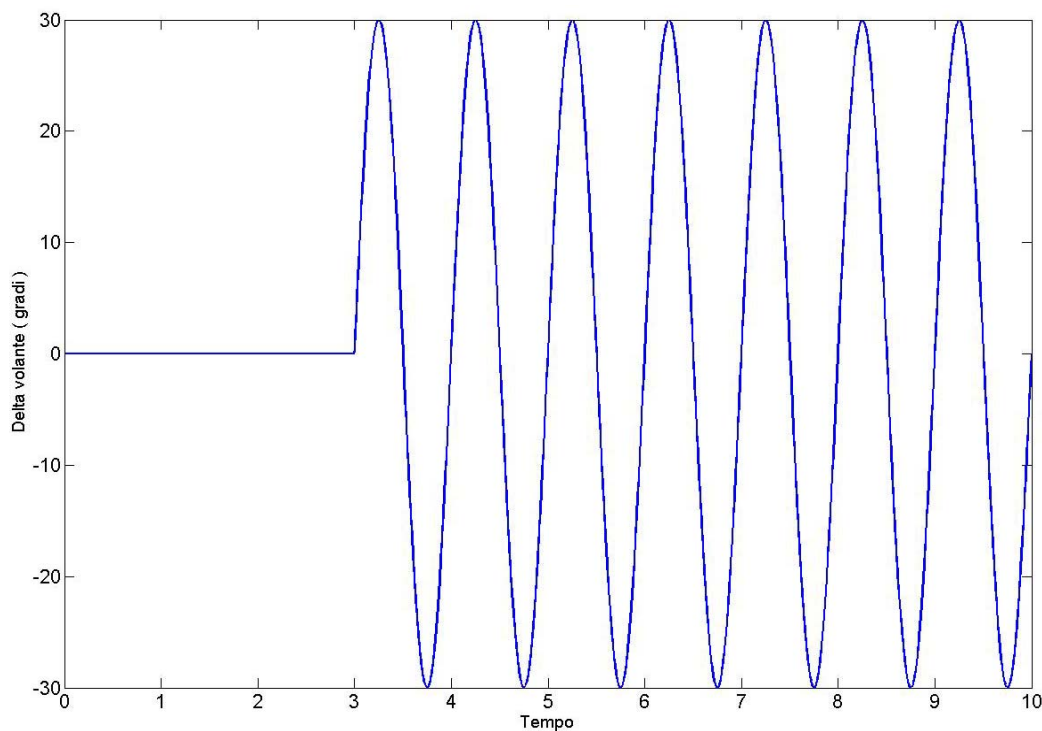


Fig 4.12 – Andamento dell'angolo di sterzo volante

Contemporaneamente viene implementato un controllo di coppia motrice ad inseguimento di velocità per cercare di mantenere costante la velocità longitudinale u .

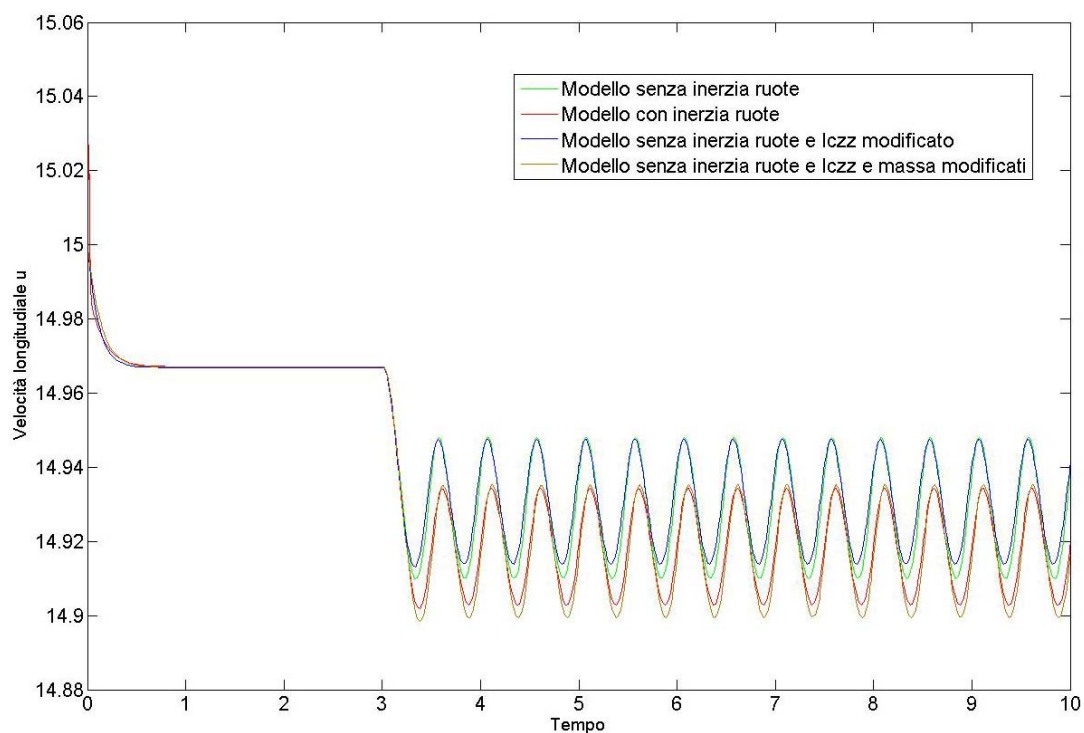
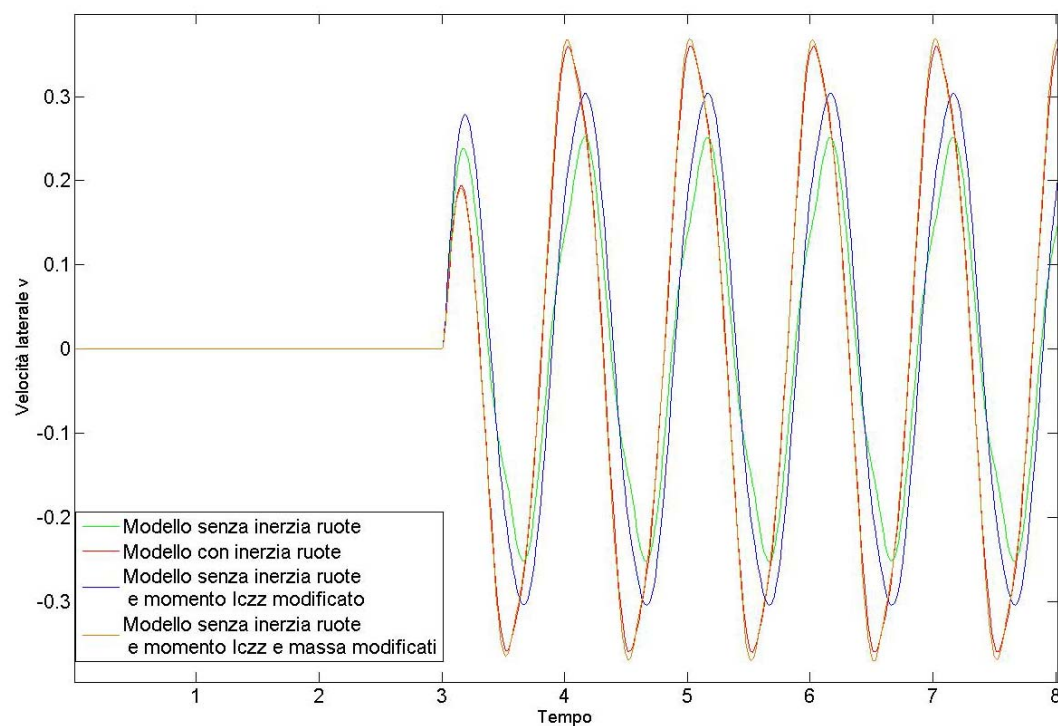
La relazione che quindi definisce la coppia motrice è:

$$M_m = K \cdot (u_{\text{riferimento}} - u_{\text{effettiva}}) \quad (4.3)$$

Ovviamente, tanto più grande è la costante di guadagno e tanto più la velocità longitudinale rimane prossima al valore desiderato, pari anch'esso a 15 m/s .

In questo esempio, si è imposta pari a 100 (Ns).

Gli andamenti della velocità longitudinale e di quella laterale sono riportati di seguito.

Fig 4.13 – Andamento della velocità longitudinale u (m/s)Fig 4.14 – Andamento della velocità laterale v (m/s)

Come si può vedere dagli andamenti, a fare la differenza sull'ampiezza è sia il momento d'inerzia che la massa del veicolo. In particolare, la curva rossa e quella marrone si ricalcano abbastanza

fedelmente in quanto, per quelle curve, massa complessiva e momento di inerzia complessivo del veicolo sono gli stessi.

Nel confronto tra le curve verde e blu, relative entrambe a veicolo senza inerzia ruote, ma con momento di inerzia differente, il maggior picco di velocità laterale della curva blu è da attribuire ad una stessa velocità laterale (nei primi istanti), ma ad una velocità di imbardata inferiore (causa del momento d'inerzia maggiorato) che quindi sottrae una componente maggiore alla proiezione sull'asse j della velocità V_N .

Quanto detto è confermato dal confronto tra le velocità di imbardata nelle 4 distribuzioni di inerzia e momenti, soprattutto nel successivo diagramma ingrandito.

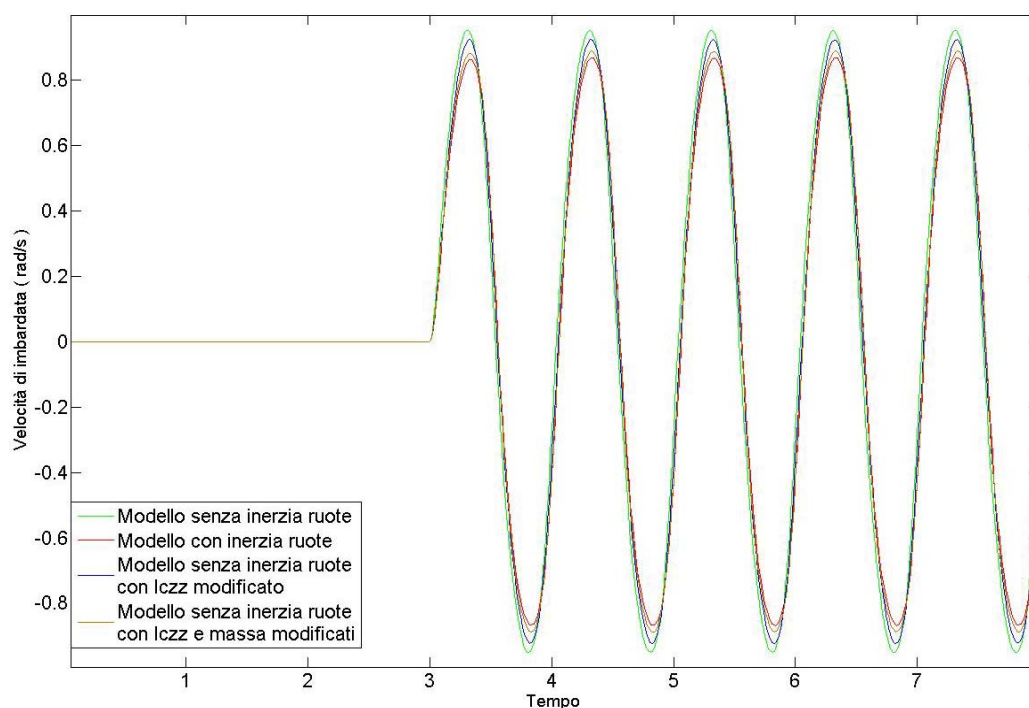


Fig 4.15 – Andamento della velocità di imbardata (rad/s)

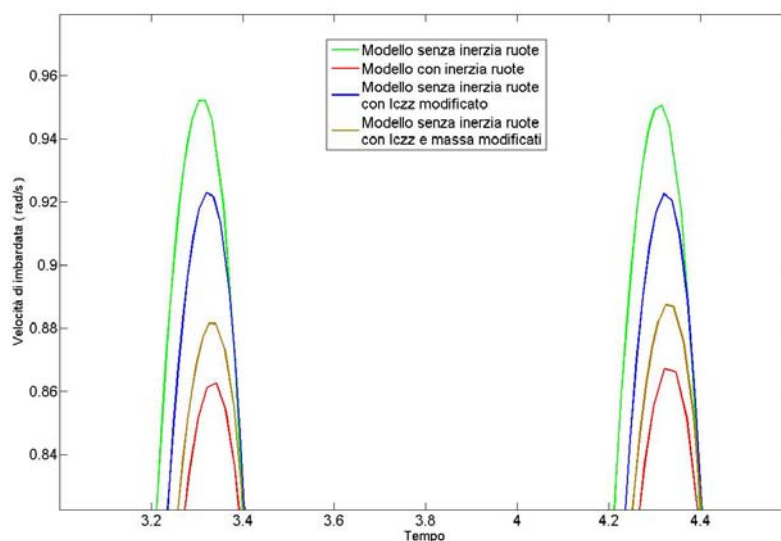


Fig 4.16 – Particolare dei massimi delle funzioni velocità di imbardata (rad/s)

La massima differenza tra i picchi delle curve è dell'ordine del 10%, relativa al modello meno dettagliato e al più dettagliato.

Altre differenze sostanziali sono riscontrabili nell'andamento dell'angolo di rollio.

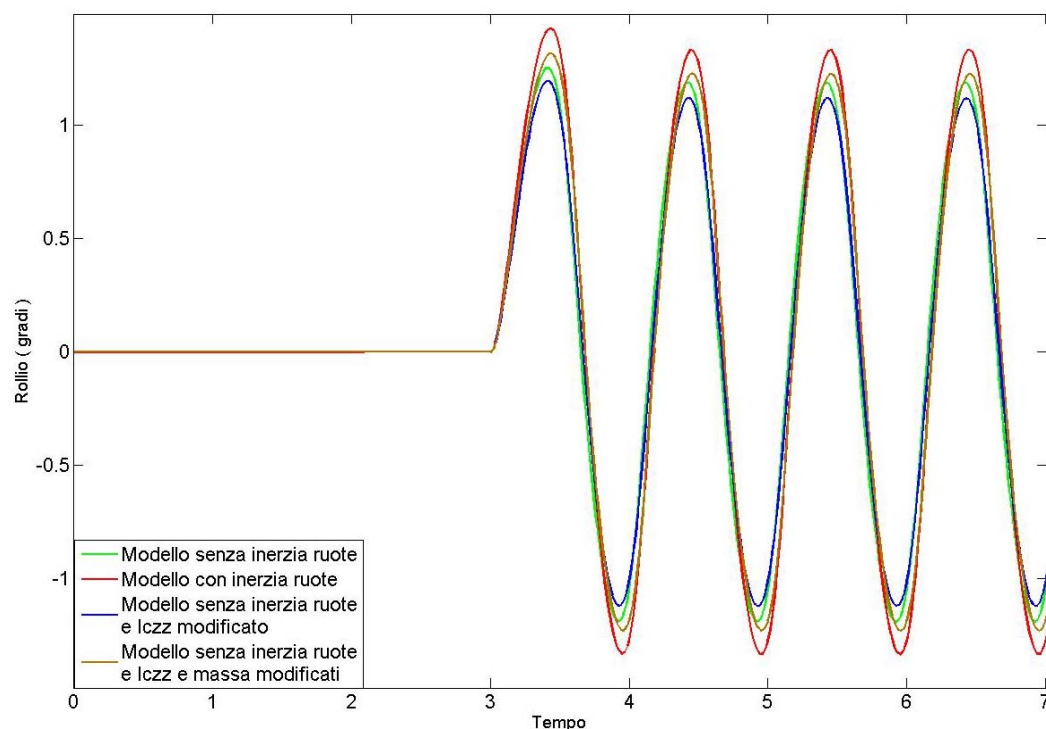


Fig 4.17 – Andamento dell'angolo di rollio (°)

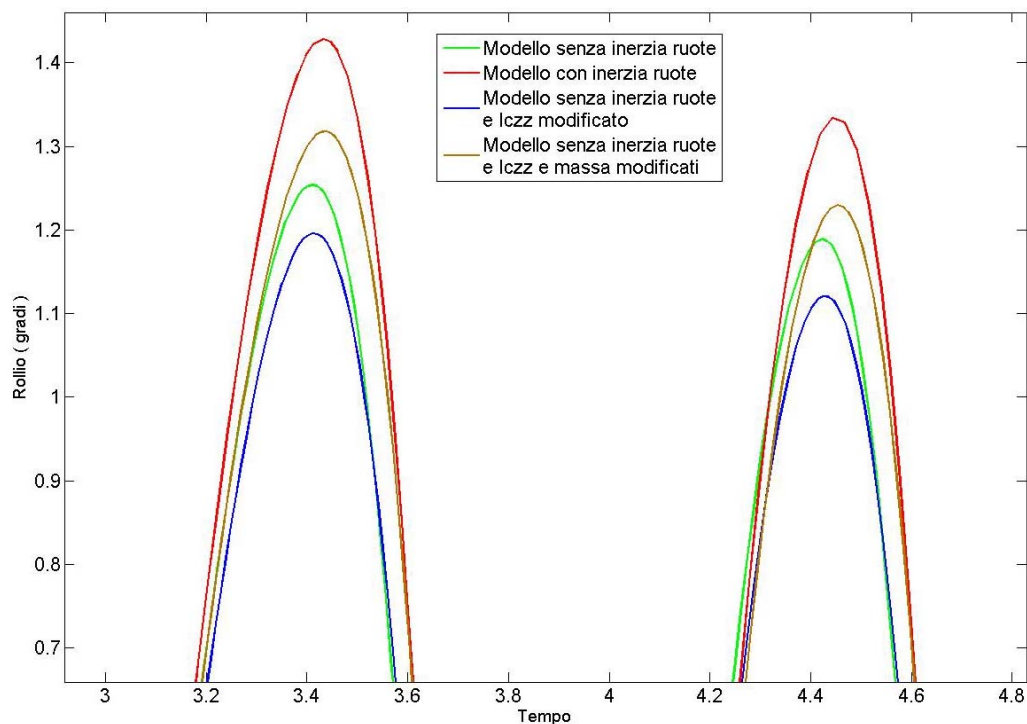


Fig 4.18 – Particolare dei massimi dell'angolo di rollio (°)

Nell'ultima immagine si nota bene come il primo picco sia ovviamente superiore al secondo per la tendenza che la cassa ha a proseguire nel suo moto rettilineo.

In questo caso il rollio maggiore è relativo al modello con inerzia delle ruote, perché la deformabilità radiale del pneumatico introduce una ulteriore rotazione della cassa del veicolo, oltre a quella relativa tra cassa e “assale”.

Per quanto riguarda le altre curve, quella marrone, relativa a veicolo con la massa totalmente inglobata nella cassa, si avvicina di più a quella rossa. Questo è da motivarsi con una mancata compensazione tra l'abbassamento del baricentro (dunque la minor tendenza al rollio) e la maggiore massa (dunque la maggiore tendenza a rollio).

È inoltre visibile, dal confronto tra la curva verde e blu, come l'effetto del maggiore momento di inerzia I_{czz} comporti un minor rollio.

Altri andamenti interessanti sono quelli di forza verticale e laterale agenti sui pneumatici. In questa sede si riporta il confronto solo tra modello completo e modello senza ruote per la stessa ruota, in particolare l'anteriore sinistra.

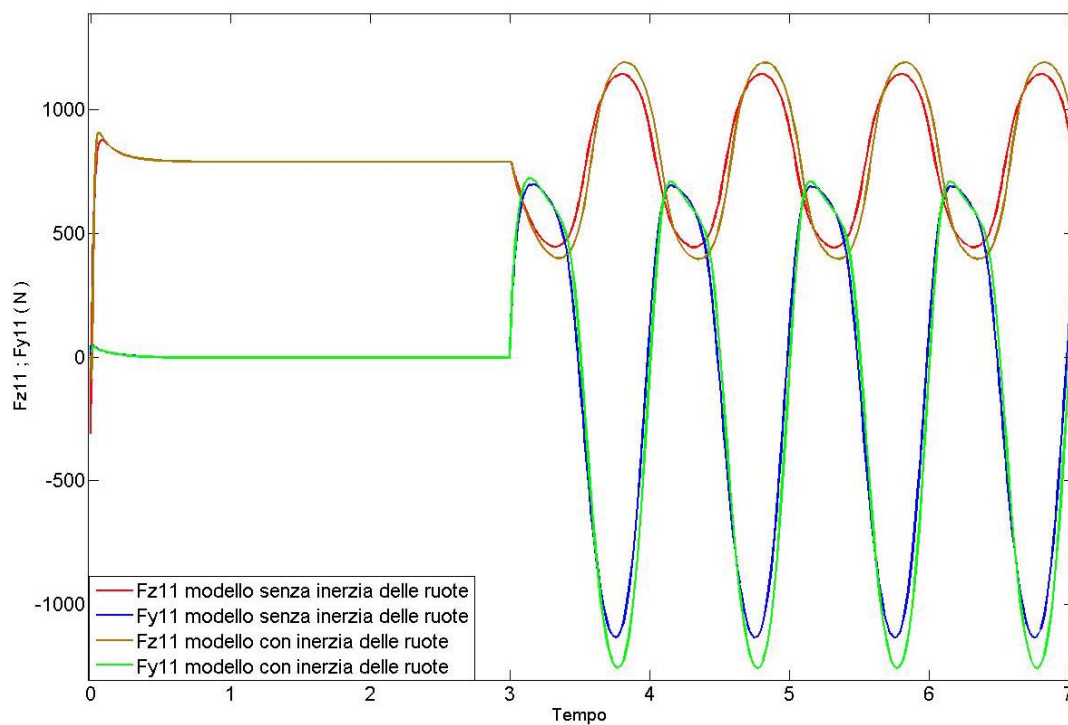


Fig 4.19 – Contatto a terra del pneumatico anteriore sinistro

In questo caso il motivo della differenza è ovviamente da attribuire al diverso accoppiamento tra masse sospese e strada. Nel modello senza inerzia delle ruote, a terra arriva in modo integrale il contributo introdotto dal rollio della cassa, mentre nell'altro caso la massa delle ruote introduce alleggerimenti di carico in distensione e aumenti in compressione. La differenza si ripercuote necessariamente nello stesso modo sulle forze laterali.

Da notare come, alla velocità di 15 m/s (54 Km/h), la manovra di Sine Sweep avvenga in totale sicurezza. La condizione limite per il ribaltamento è assai lontana.

Una grandezza interessante da rappresentare è il camber assoluto delle ruote posteriori. Durante prove della monoposto ET1 effettuate all'aeroporto, molto visibile era la tendenza delle ruote posteriori esterne alla curva nel disporsi con camber assoluto positivo.

Quello che emerge dalle simulazioni è proprio questo, per tutte le combinazioni di inerzia e momenti.

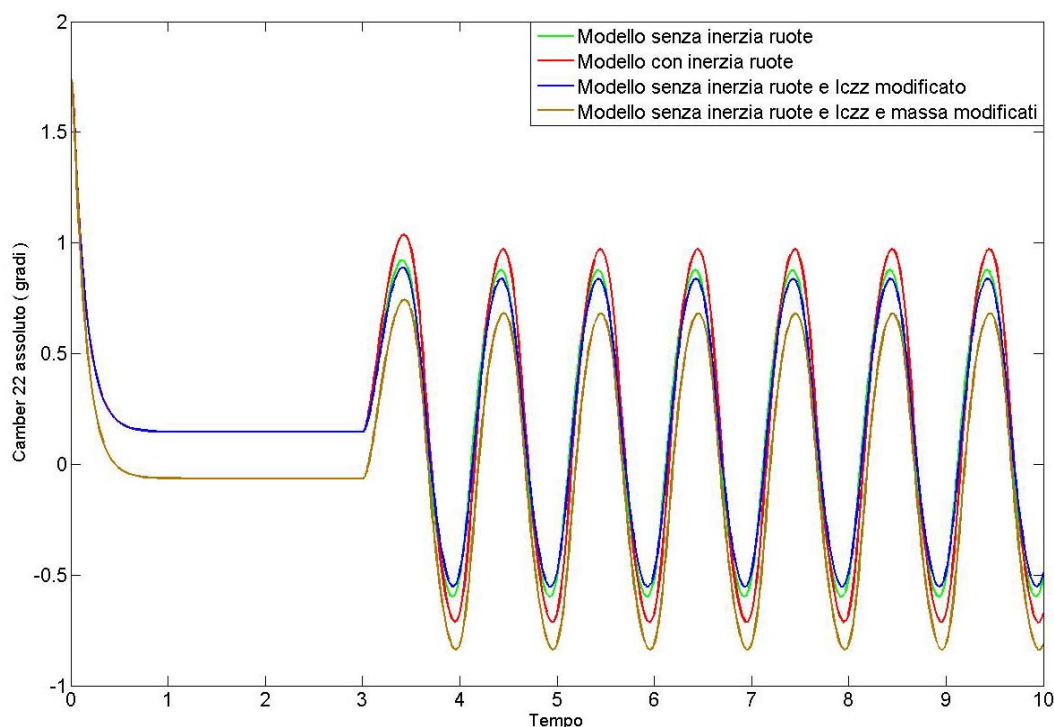


Fig 4.20 – Angolo di Camber assoluto della ruota posteriore destra ($^{\circ}$)

La geometria costruttiva delle sospensioni tende a far sì che, all'aumentare dell'escursione, il camber relativo delle ruote rispetto alla cassa diminuisca. Questo è ben visibile nella fase di assestamento, prima del Sine Sweep, tra la curva marrone (ovvero quando tutta la massa del veicolo è inglobata sulla cassa) e le altre.

Questa tendenza però non è sufficiente a fare in modo che le ruote esterne alla curva abbiano camber negativo, in modo da contribuire alla spinta laterale introdotta dall'angolo di deriva. L'andamento della posizione verticale del centro ruota anteriore sinistro (per gli altri vale ovviamente un discorso del tutto analogo) ha infatti il seguente andamento.

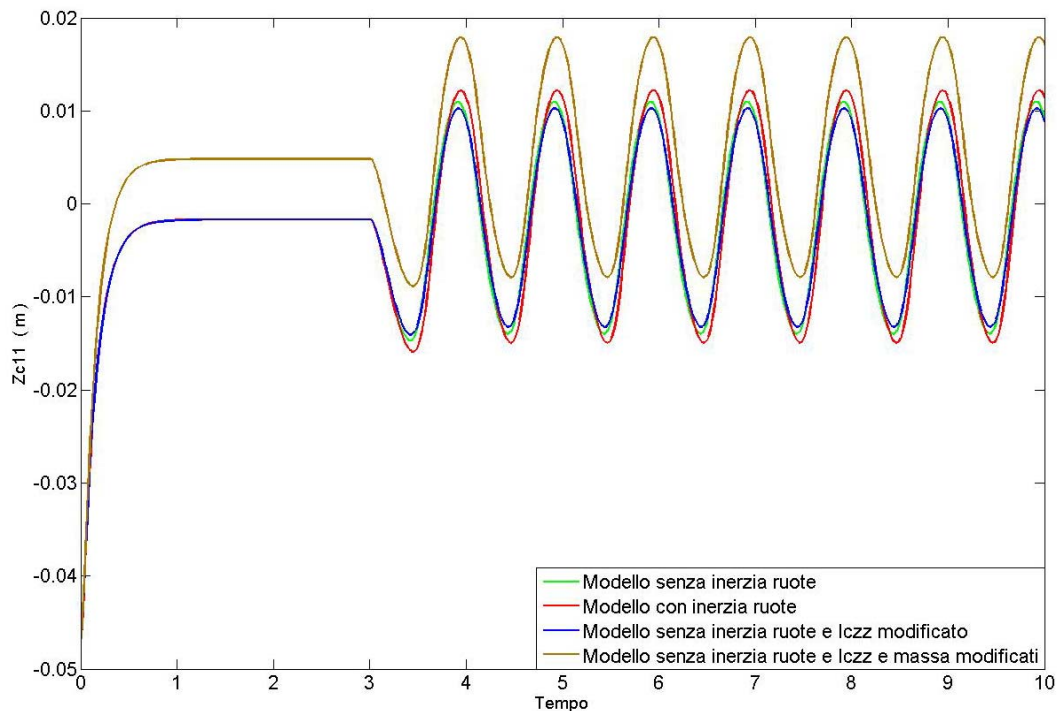


Fig 4.21 – Posizioni verticali del centro ruota 11 nel riferimento cassa per i 4 modelli (m)

Ci sarebbero molti altri parametri da rappresentare, ma tra tutti la migliore rappresentazione è quella della coppia da applicare al volante per effettuare la manovra voluta. In tali andamenti si riflettono le stesse differenze visibili sulle forze laterali.

Facendo infatti momento rispetto all'asse di sterzo della ruota, le F_y originano una funzione che ha tutte le caratteristiche della forza stessa.

L'unica differenza è che al volante arriva la somma di quello che succede su entrambe le ruote. Mentre quindi la singola forza laterale sul pneumatico oscilla in modo non simmetrico rispetto allo zero, la coppia di sterzo invece si dispone simmetricamente rispetto all'asse dei tempi.

Quello che invece arriva comunque al volante sono i massimi “deformati” delle forze laterali, perché nella somma delle forze in corrispondenza del massimo, quella che esercita la maggiore forza ha un massimo “pulito”, mentre quella che esercita la forza minore ha un massimo “sporco”, con il risultato che allo sterzo vengono percepite comunque queste armoniche aggiuntive.

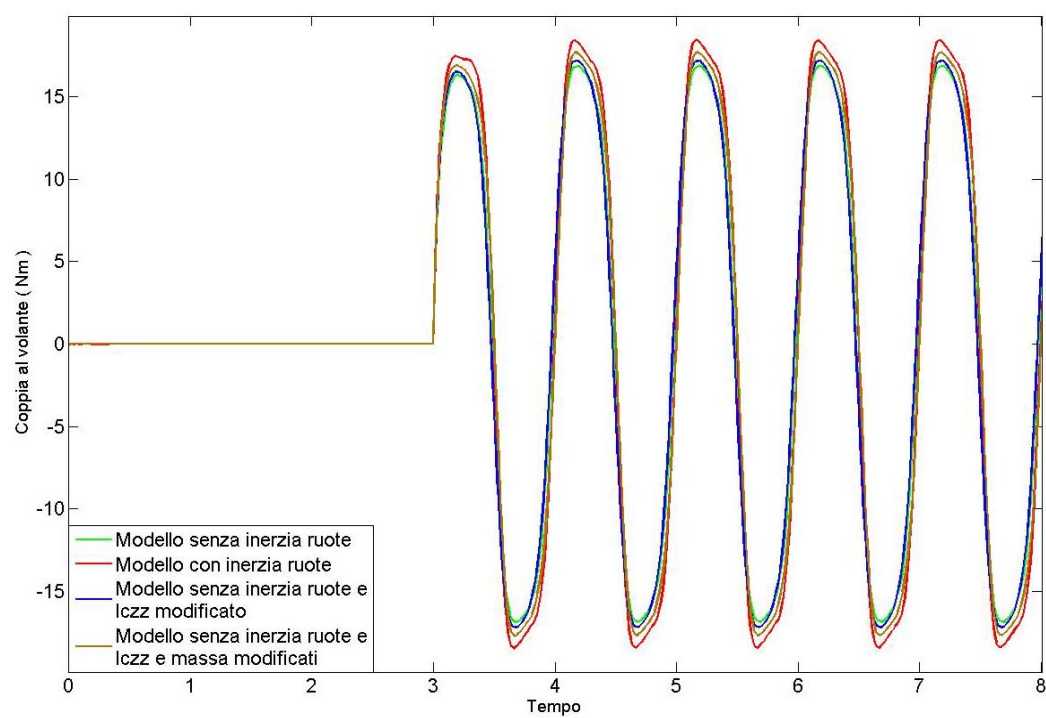


Fig 4.22 – Coppia di sterzo al volante (Nm)

4.3 Colpo di sterzo

In questa manovra il pilota impone al volante un passaggio “istantaneo” da una posizione angolare ad un'altra. In particolare, si simula un colpo di sterzo di 40° , che avviene dopo 5 s dall'inizio della simulazione, a partire da una velocità iniziale di 20 m/s.

La posizione del volante si mantiene invariata fino a fine simulazione, ovvero fino all'istante 20s. Il raggiungimento della posizione volante suddetta, avviene tramite una rampa di durata pari a 0.2 s. L'andamento dell'angolo di sterzo volante è quindi il seguente

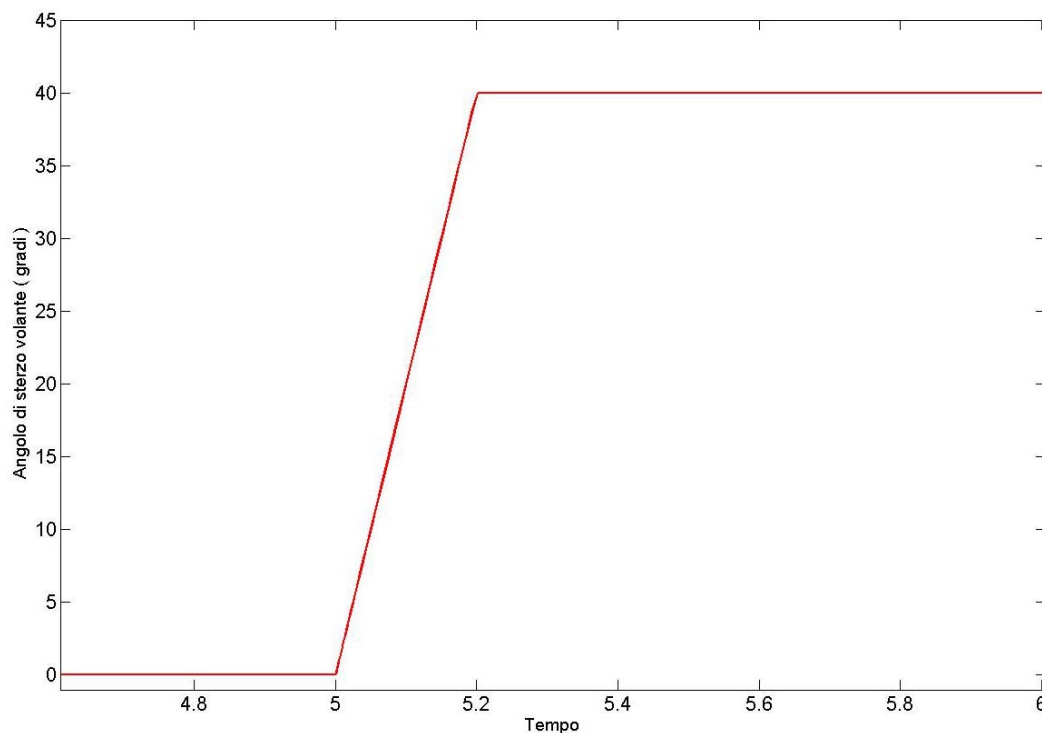
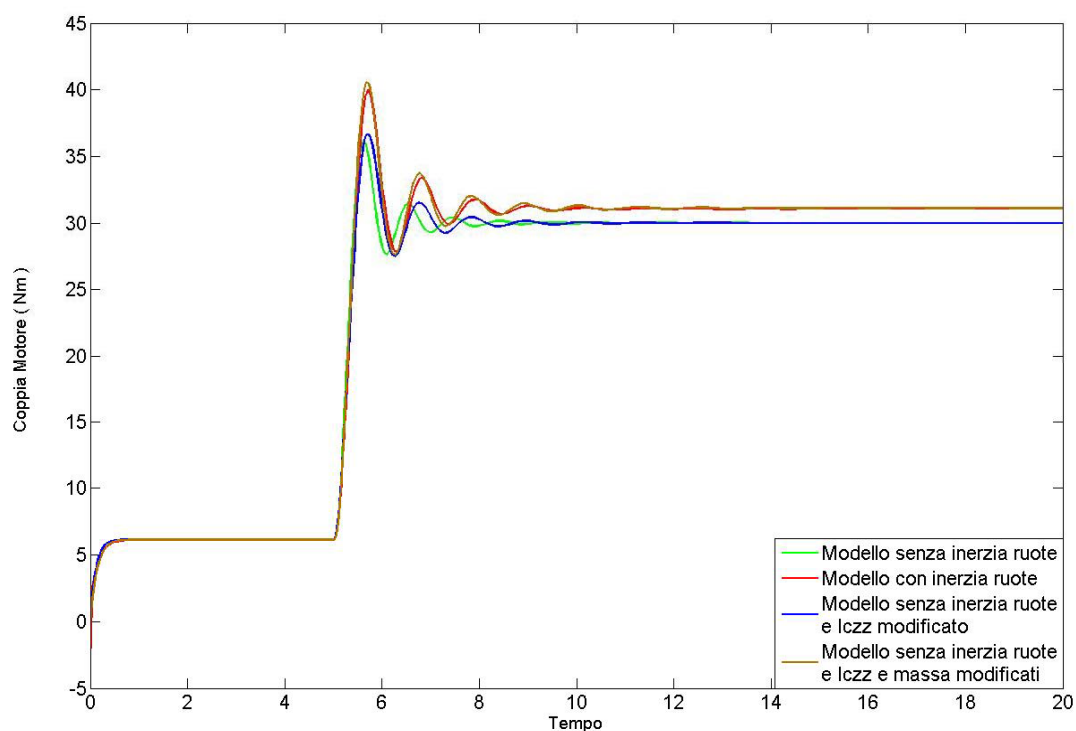


Fig 4.23 – Angolo di sterzo volante ($^\circ$) nell'intorno dell'istante 5 s

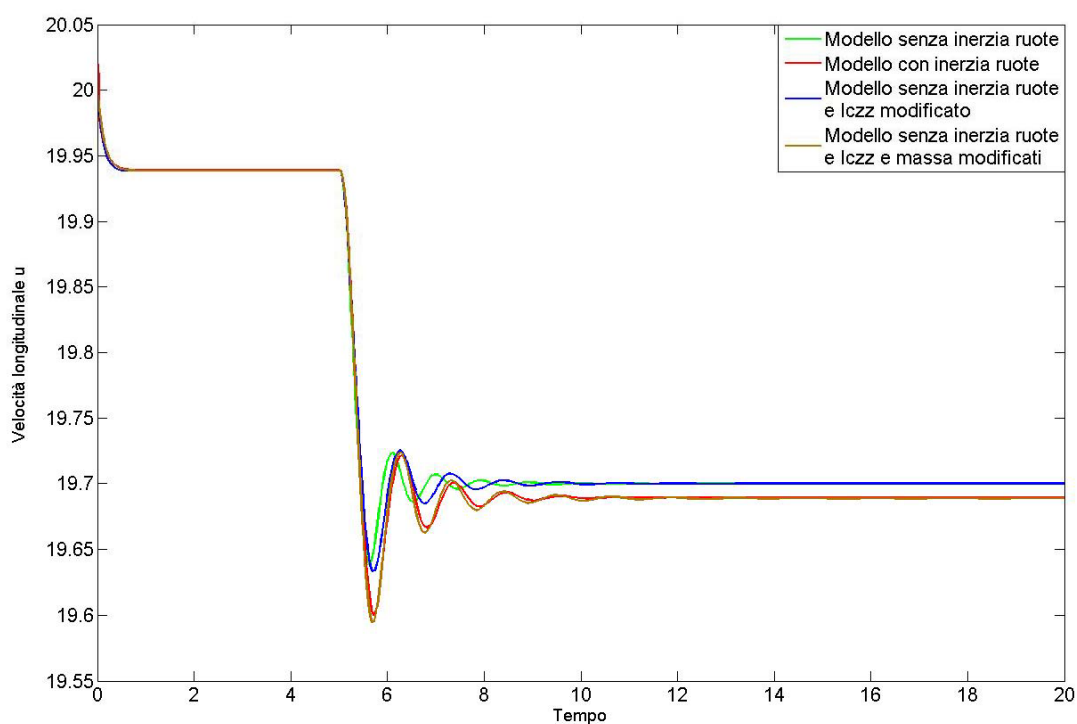
Anche in questa manovra, viene contemporaneamente mantenuto l'equilibrio in condizioni stazionarie con un profilo di coppia motrice ad inseguimento di velocità, con gli stessi estremi della manovra precedente.

$$M_m = K \cdot (u_{\text{riferimento}} - u_{\text{effettiva}}) \quad (4.4)$$

Per completezza si rappresenta l'andamento della coppia motrice che deve essere erogata dal motore per inseguire la velocità voluta. I rapporti di trasmissione inseriti in questa manovra sono la seconda al cambio (0.5208) e l'accoppiata pignone-corona 15/36 come finale.

Fig 4.24 – Andamento della coppia motrice M_m (Nm)

Passando ora ad andamenti più importanti, si riportano in sequenza velocità longitudinale laterale e velocità di imbardata.

Fig 4.25 – Andamento della velocità longitudinale u (m/s)

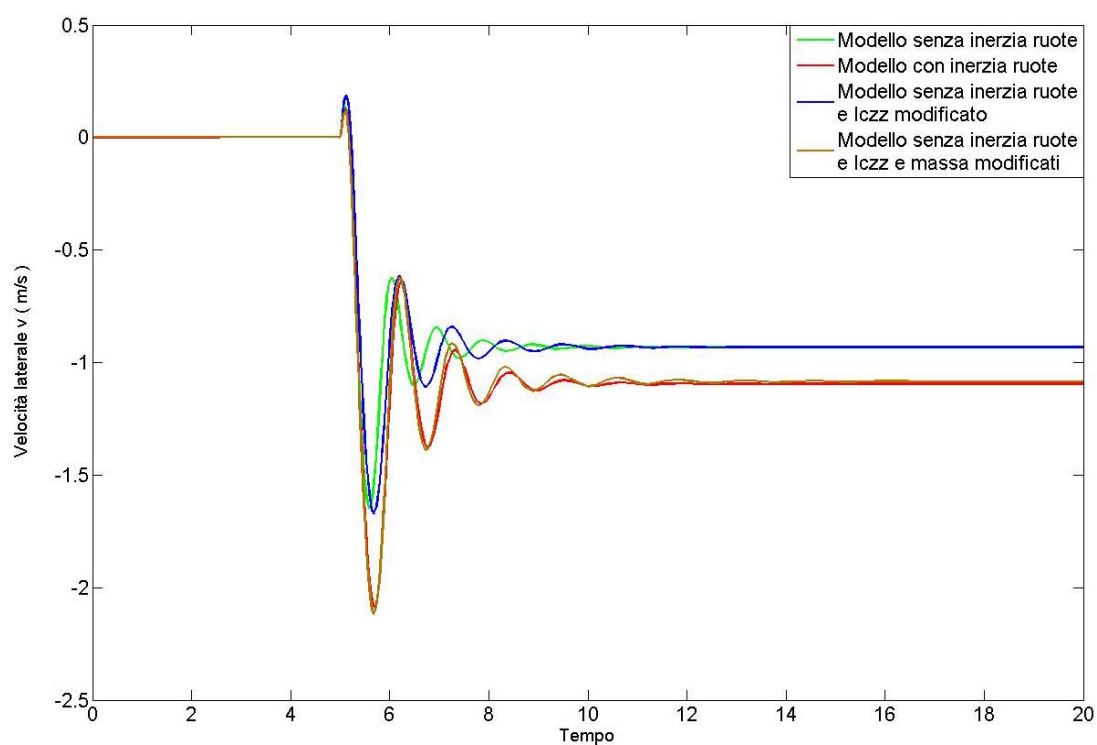
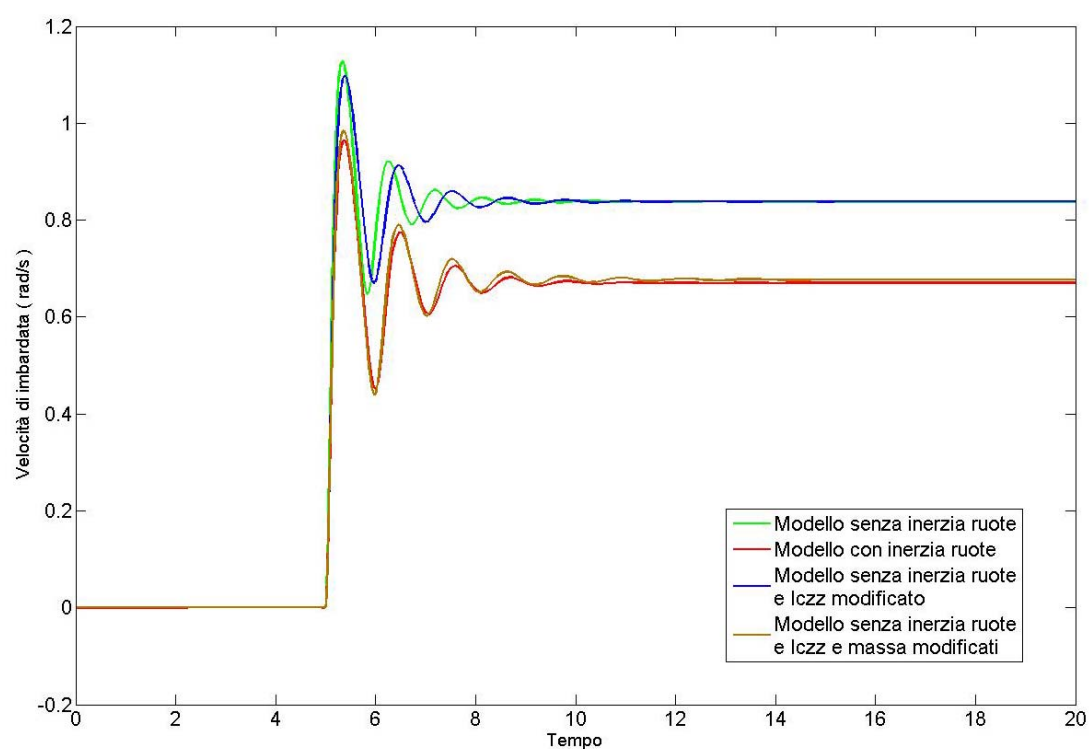
Fig 4.26 – Andamento della velocità laterale v (m/s)

Fig 4.27 – Andamento della velocità di imbardata (rad/s)

I risultati ottenuti meritano decisamente qualche commento.

Prima di farlo però si riporta anche l'andamento della velocità laterale v (solo per il modello senza inerzia e con inerzia delle ruote) nel caso in cui la velocità longitudinale di regime valga in un caso 20 m/s e in un altro 10 m/s.

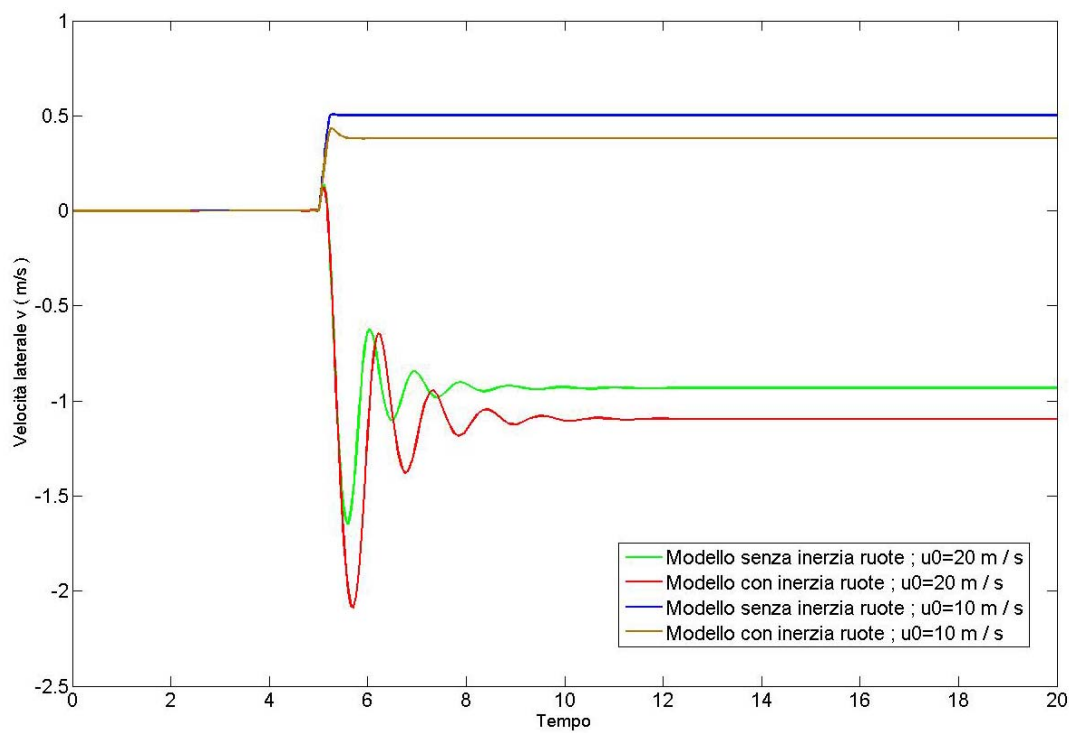


Fig 4.28 – Andamento della velocità laterale v (m/s) per due differenti punti di equilibrio

Confrontando i risultati ottenuti con le relazioni tipiche del modello monotraccia lineare, non si può far altro che verificare la bontà dei modelli elaborati.

Le relazioni che forniscono la soluzione a regime nel modello monotraccia lineare sono le seguenti:

$$v_p = \frac{(C_2 a_2 L - m a_1 u^2) C_1 u}{C_1 C_2 L^2 - m u^2 (C_1 a_1 - C_2 a_2)} \delta$$

$$r_p = \frac{C_1 C_2 L u}{C_1 C_2 L^2 - m u^2 (C_1 a_1 - C_2 a_2)} \delta$$

Dalle relazioni è riscontrabile come la soluzione a regime non dipenda dal momento di inerzia del veicolo. Gli andamenti ottenuti sono in linea con quanto detto. Non a caso, le curve verdi e blu, per le quali cambia il momento di inerzia ma non la massa, raggiungono esattamente lo stesso valore a regime sia per la velocità laterale (Fig. 4.26), che per la velocità di imbardata (Fig. 4.27). Durante il transitorio hanno andamenti differenti da attribuire ovviamente al diverso momento di inerzia $I_{c\tilde{x}\tilde{x}}$.

In effetti, se si confronta la curva blu con quella rossa e con la marrone, è evidenziabile una differenza nei valori, da attribuire proprio a quanto detto, ma gli andamenti sono praticamente in fase, essendo infatti il momento di inerzia del veicolo lo stesso. Analogo ragionamento vale per le altre due curve, che però non portano a risultati esattamente uguali (anche se poco visibile). Il motivo è da riscontrare nella non identica distribuzione della massa, con leggera differenza sui semipassi. Dalla figura 4.28 invece emerge il tipico comportamento a regime a bassa velocità e ad alta velocità. Nel primo caso infatti la velocità laterale è positiva, dunque il veicolo effettua la manovra con l'avantreno che punta verso l'eterno curva, mentre ad alta velocità succede l'opposto. Questo è un comportamento tipico dei veicoli. Basta pensare alla sterzata cinematica, durante la quale inevitabilmente la velocità laterale è positiva.

Inoltre nella 4.28, il confronto avviene solo tra modello completo e semplice di veicolo. Oltre alla differenza nel valore di regime, è visibile un certo ritardo negli andamenti della velocità laterale (quando $u = 20 \text{ m/s}$) dovuti al diverso momento di inerzia.

Passando a grandezze di posizione, l'andamento dell'angolo di imbardata, sempre nelle quattro possibili configurazioni di inerzia è

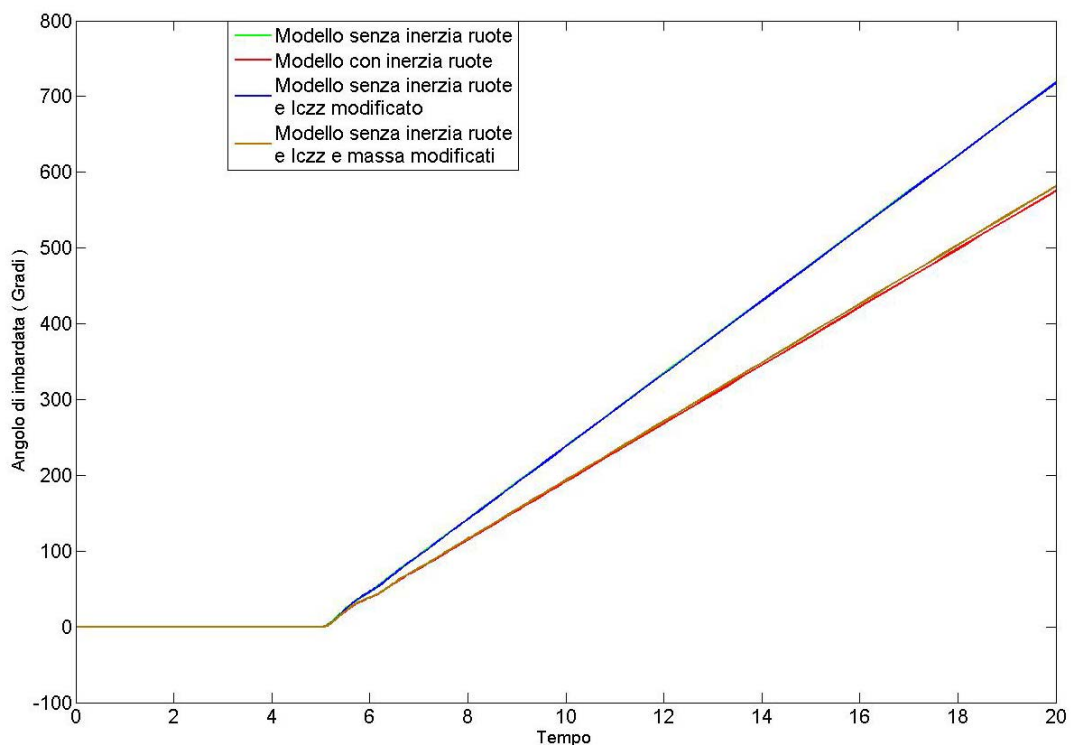


Fig 4.29 – Andamento dell'angolo di imbardata ($^{\circ}$)

Riportando l'ingrandimento della fase appena successiva al colpo di sterzo, sono visibili anche sull'angolo ψ gli effetti delle forti differenze di velocità di imbardata, nonostante l'integratore sia un filtro passa basso.

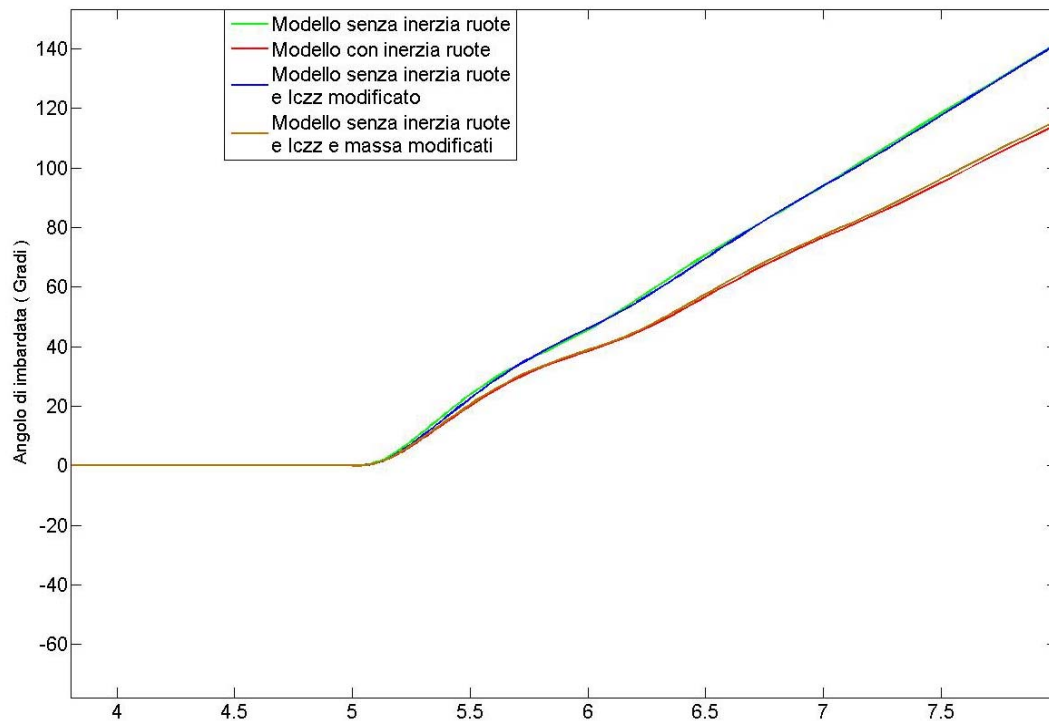


Fig 4.30 – Particolare dell'angolo ψ (°) negli istanti appena successivi al colpo di sterzo

In effetti, dalla Fig 4.27, le ampiezze dell'oscillazione smorzata della curva rossa e marrone, sono superiori rispetto alle altre due. Il veicolo quindi tende a “serpeggiare” intorno all'angolo di imbardata lineare con il tempo, in modo più marcato nel caso di veicolo con distribuzione reale delle masse, rispetto al modello semplice di veicolo.

Questa manovra mette in luce notevoli differenze nei risultati tra i modelli sviluppati, non certamente trascurabili quando, nelle prove affrontate dalla monoposto, tali differenze comportano numerose posizioni in classifica.

Altre grandezze di posizione interessanti sono angolo di rollio, angolo di camber assoluto della ruota posteriore destra e compressioni radiali dei pneumatici (solo ovviamente per il modello completo di veicolo).

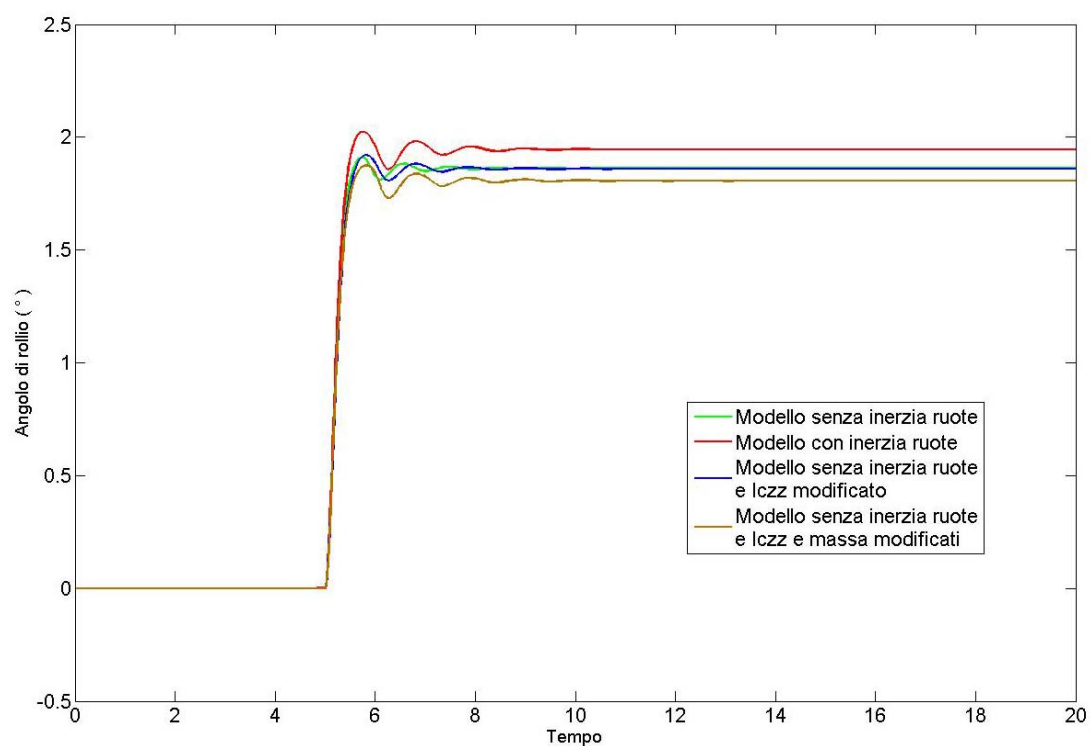
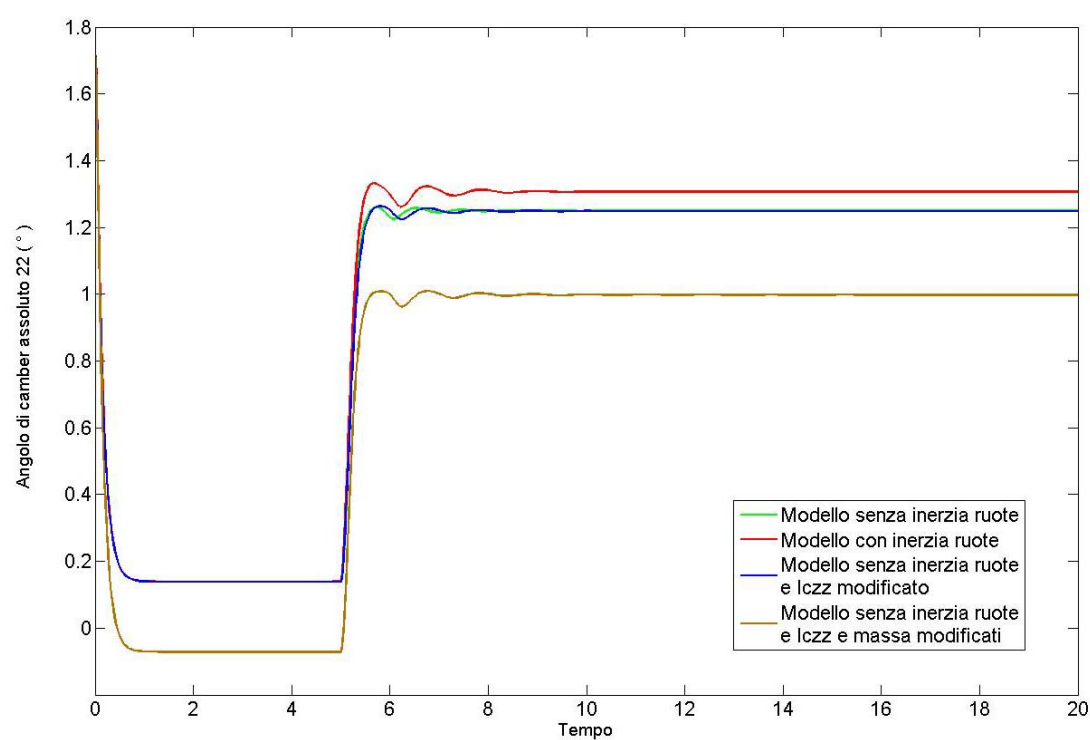
Fig 4.31 – Andamento dell'angolo di rollio Φ (°)

Fig 4.32 – Andamento dell'angolo di camber assoluto della ruota posteriore destra (°)

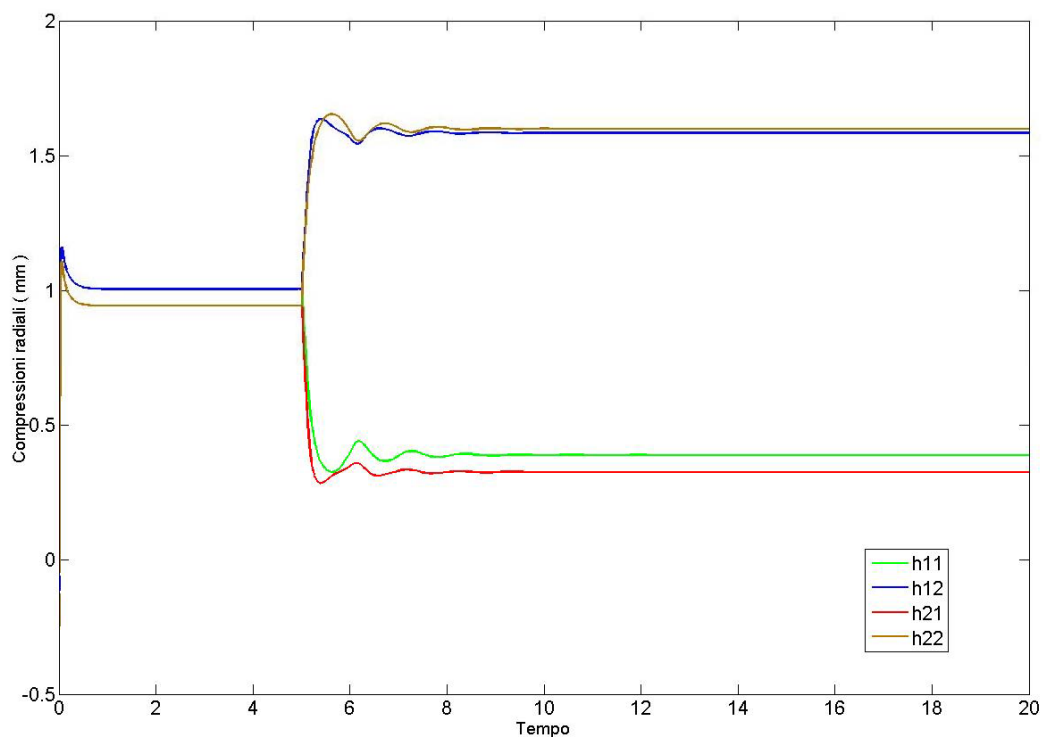


Fig 4.33 – Andamento delle compressioni radiali dei pneumatici (mm)

Passando alle forze, è interessante rappresentare, per esempio, le azioni sulle ruote 11 e 22, sia verticali che laterali.

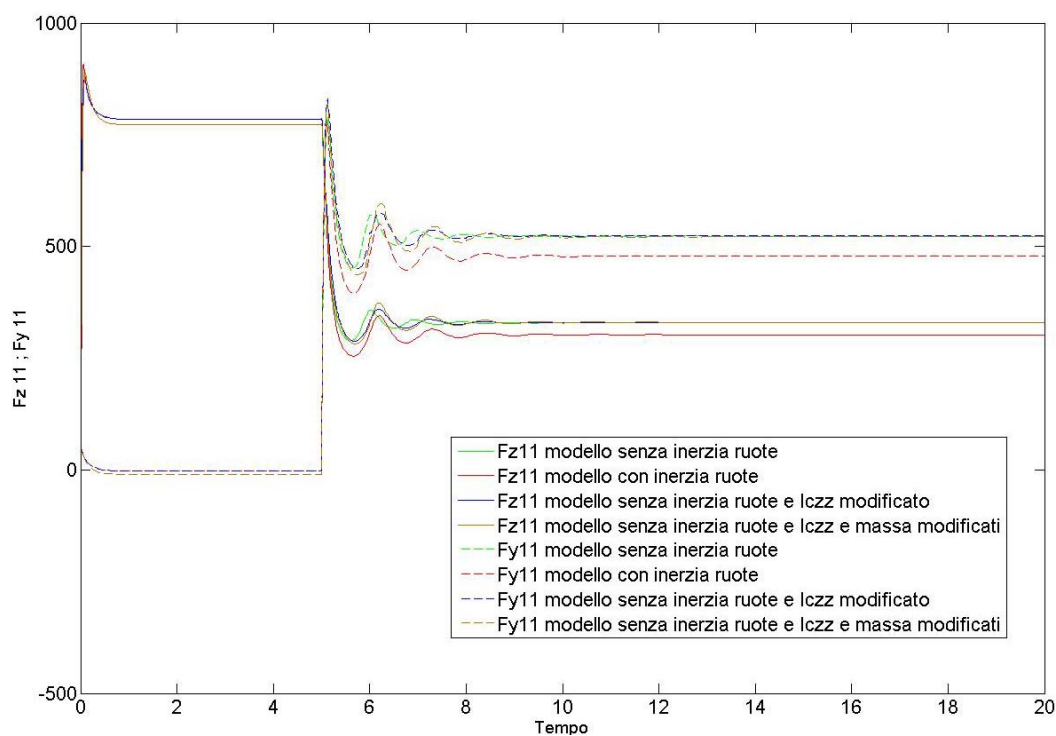


Fig 4.34 – Andamento delle forze verticali e laterali (N) sulla ruota anteriore sinistra per tutte le configurazioni di inerzia

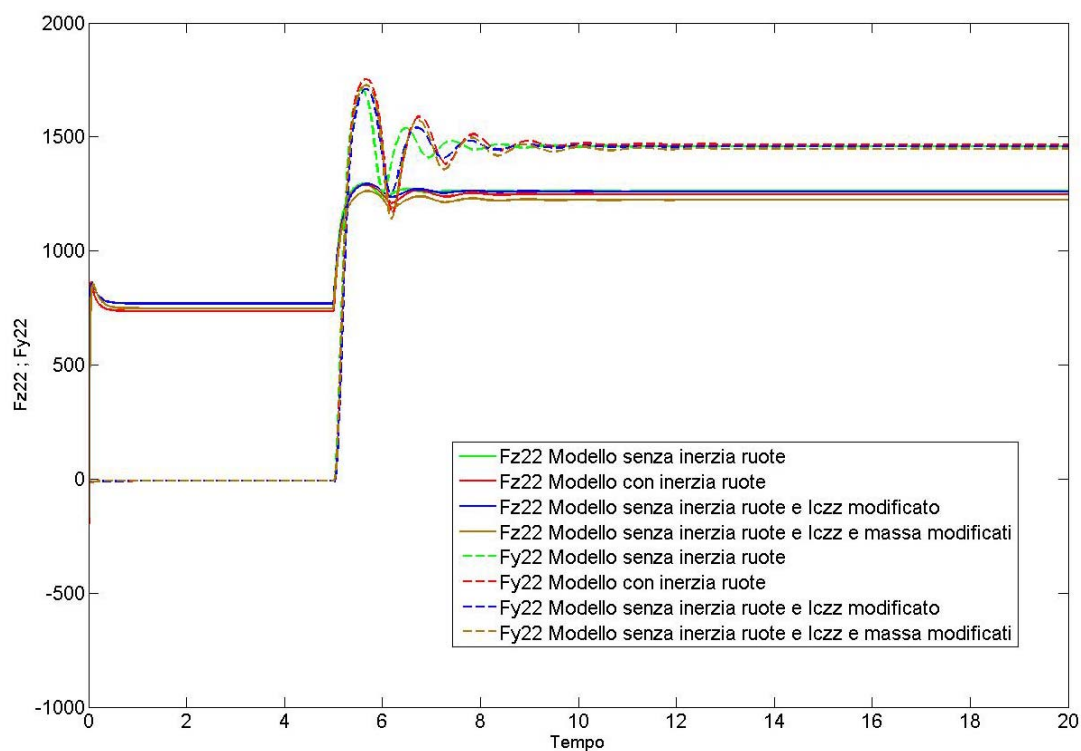


Fig 4.35 – Andamento delle forze verticali e laterali (N) sulla ruota posteriore destra per tutte le configurazioni di inerzia

Facendo un ingrandimento degli andamenti nel transitorio, si possono notare effetti simili a quelli visti in precedenza.

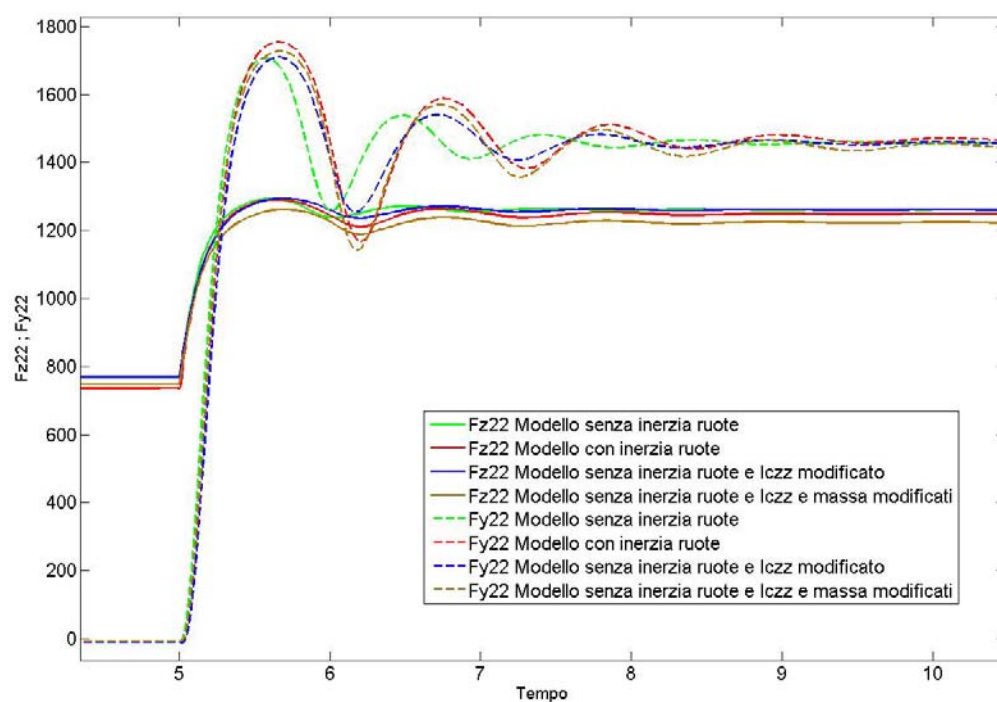


Fig 4.36 – Transitorio delle forze sul pneumatico posteriore destro

Le curve in tratteggio sono relative alle forze laterali, mentre le continue a quelle verticali. A regime i valori sono comparabili, sia in termini di forza verticale che di forza verticale. Durante il transitorio però sono nuovamente visibili sfasamenti temporali tra la curva verde (sia in tratteggio che continua) e tutte le altre, oltre ai classici diversi valori di picco.

Le ultime curve di interesse sono quelle relative alla coppia di sterzo al volante e agli angoli di deriva. Per gli angoli di deriva si riportano gli andamenti relativi al confronto solo tra modello con e senza inerzia ruote e la differenza tra angoli anteriori e posteriori, ovviamente per il medesimo modello e in condizioni stazionarie.

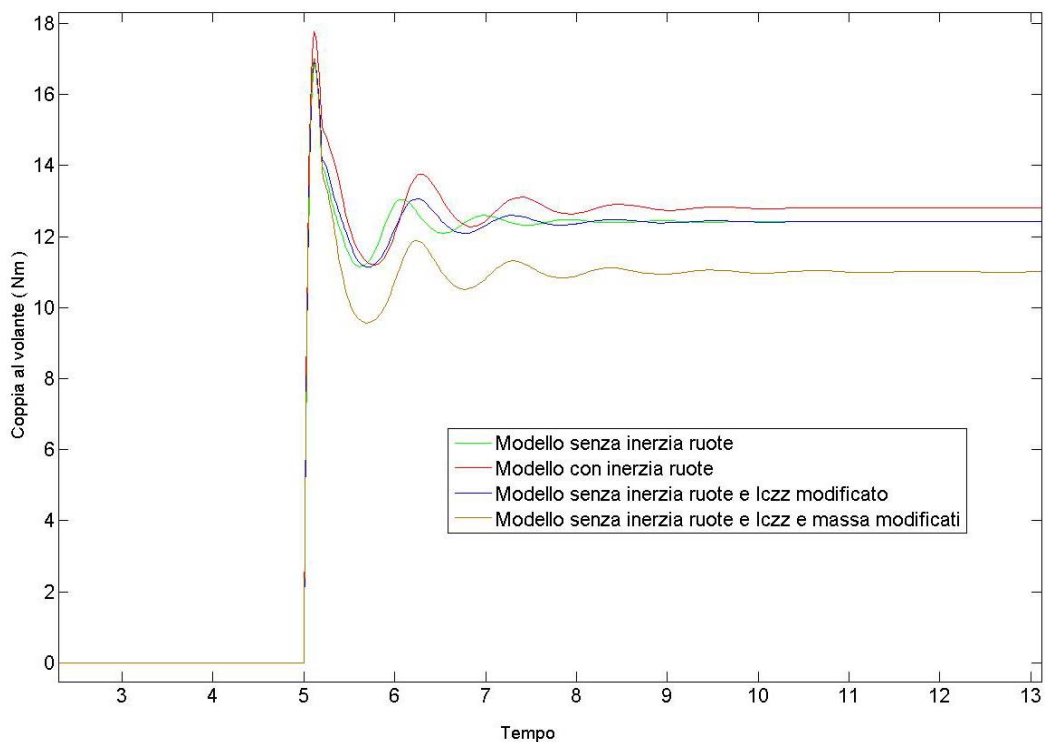


Fig 4.37 – Andamento della coppia di sterzo al volante (Nm)

L'evidente differenza che c'è tra la curva marrone e le altre è sicuramente imputabile ad diverso assetto della vettura quando la sulla cassa viene concentrata tutta la massa del veicolo.

Come per altri andamenti, la curva verde e blu a regime assumono ovviamente lo stesso valore, mentre in transitorio le verde è in anticipo rispetto a tutte le altre, conseguenza di un assestamento del moto più repentino sotto ogni punto di vista.

Passando agli angoli di deriva, in sequenza si riportano gli andamenti del transitorio nel caso in cui la manovra avvenga con velocità longitudinale iniziale pari a 10 m/s e 20 m/s . In ultima analisi la differenza delle derivate anteriori e posteriori alle suddette velocità, solo per modello completo e senza inerzia delle ruote.

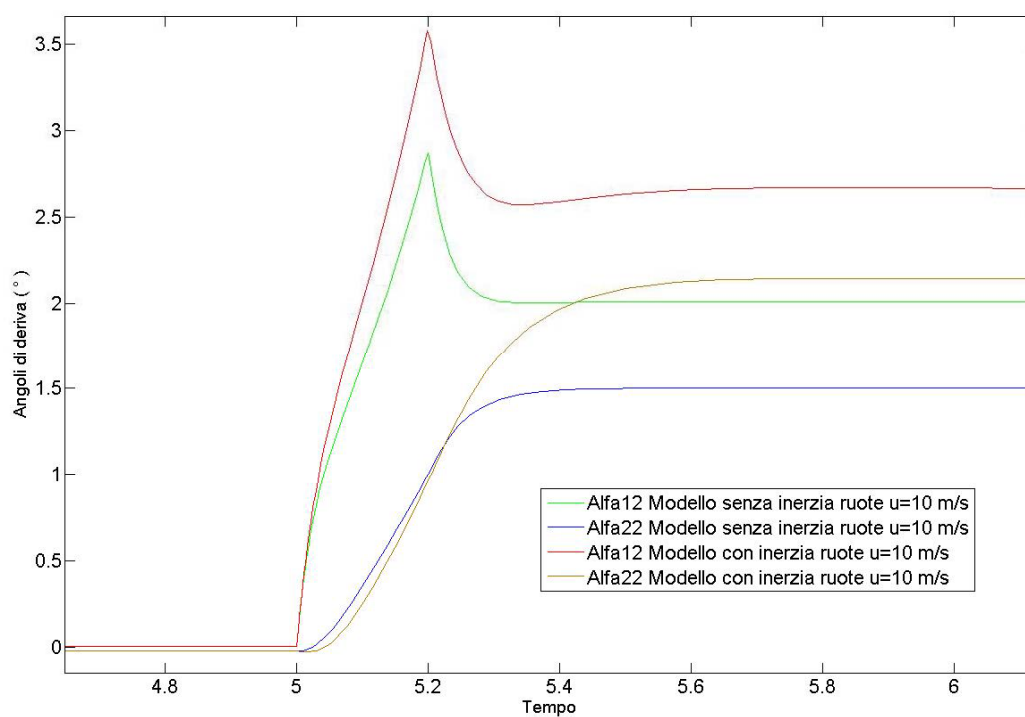


Fig 4.38 – Transitorio degli angoli α_{12} e α_{22} nel colpo di sterzo con velocità $u_0=10$ m/s

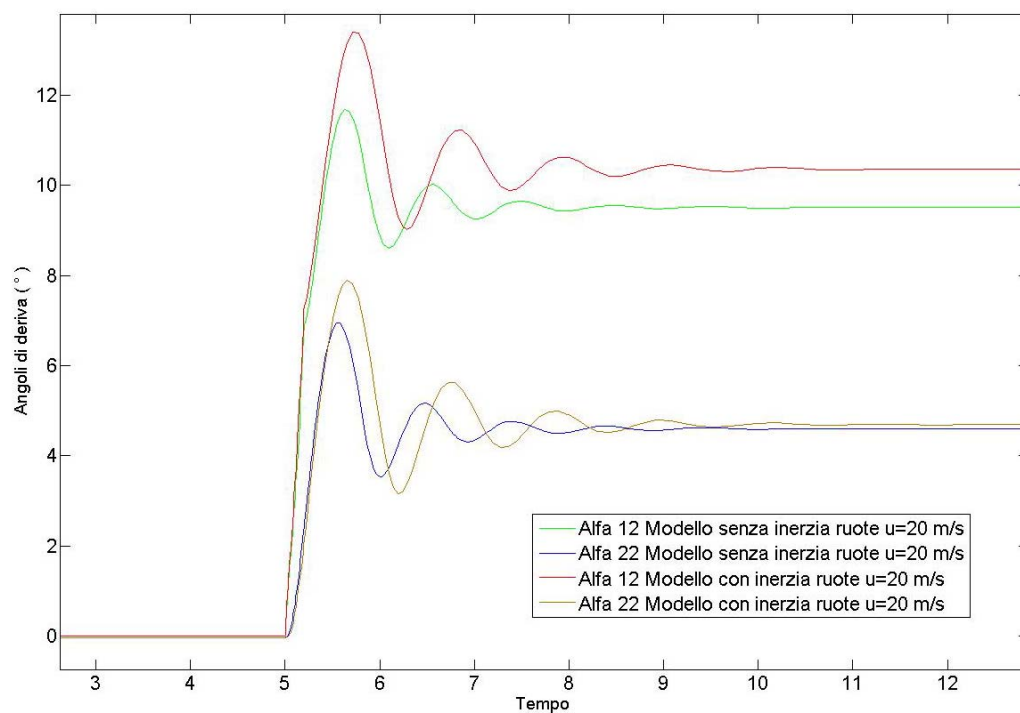


Fig 4.39 – Transitorio degli angoli α_{12} e α_{22} nel colpo di sterzo con velocità $u_0=20$ m/s

Le differenze tra gli angoli di deriva anteriori e posteriori per i due modelli, alle velocità dette sono riportate di seguito.

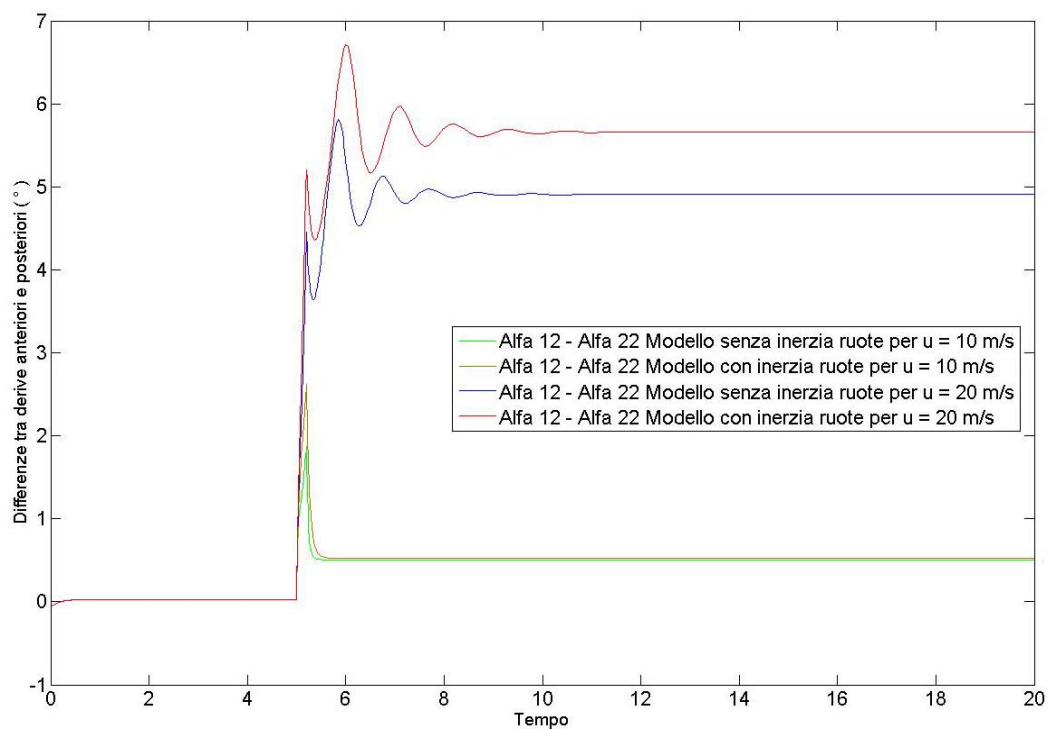


Fig 4.40 – Differenza tra gli angoli di deriva anteriori e posteriori a velocità di regime di 10 m/s e 20 m/s nel caso di modello senza e con inerzia delle ruote

Dal diagramma è evidenziabile una differenza contenuta tra le derive nel caso di percorrenza della curva a bassa velocità, mentre una differenza più considerevole vige quando u vale 20 m/s.

Questo suggerisce uno studio più approfondito del comportamento della monoposto, facendo quindi una manovra con angolo di sterzo costante ma velocità longitudinale crescente in modo molto lento, al punto da considerare il veicolo in condizioni *quasi-stazionarie*.

In questo modo è possibile allacciarsi al diagramma di maneggevolezza della monoposto, diagrammandone la struttura.

- Diagramma di maneggevolezza della ET1

Per ottenere l'andamento dell'accelerazione laterale a regime (da intendersi in questo caso come una condizione quasi stazionaria come detto), si impone un profilo di velocità longitudinale monotono crescente, ma con gradiente molto basso.

Per far questo, nei modelli, la coppia motrice deve essere di tipo ad inseguimento di velocità, come visto nella manovra di Sine Sweep.

Per far in modo che non ci sia un eccessivo ritardo, basta imporre una costante di guadagno opportuna. C'è da dire che la rampa da inseguire è molto lenta, rendendo valido un qualunque guadagno. La simulazione prevede quindi di conferire una velocità iniziale al veicolo molto bassa, pari ad 1 m/s , per farla crescere molto lentamente fino al valore limite di 30 m/s , velocità di tutto rispetto per la manovra di *steering pad* effettuata con angolo di sterzo volante intermedio. L'angolo volante è ipotizzato pari a 40° . L'andamento che se ne ricava è il seguente

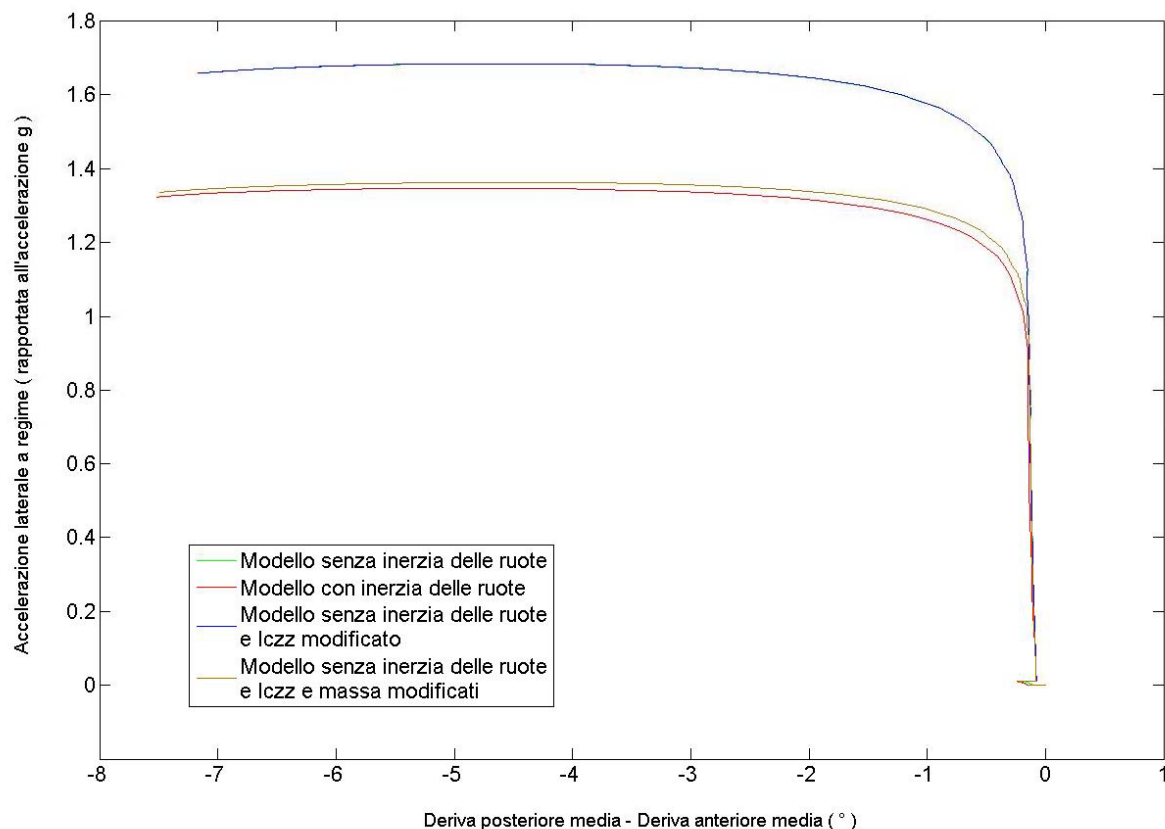


Fig 4.41 – Handling Diagram della monoposto ET1

In ascissa si è riportata la differenza tra gli angoli di deriva medi posteriori e anteriori. Il motivo che ha portato a considerare i valori medi risiede nel diverso valore che caratterizza le ruote di due fiancate opposte durante la manovra. Lo stesso andamento di accelerazione laterale a regime,

ottenuto facendo la differenza degli angoli di deriva anteriori e posteriori della stessa fiancata, comporta infatti che il diagramma non abbia inizio nell'origine, ma in un punto diverso.

Considerando invece la media, ci si avvicina di più all'origine (anche se non è necessariamente detto di essere in quel punto), com'è giusto che sia, se si pensa alla necessità di avere derive nulle, nel caso di sterzata cinematica.

Il motivo dell'aver fatto invece la differenza tra angolo posteriore e anteriore, invece che al contrario, è per motivi di rappresentazione grafica. In questo modo, percorrendo l'asse delle ascisse verso sinistra, si legge, in modulo, la differenza tra derive anteriori e posteriori, come da convenzione in letteratura.

Dal diagramma ottenuto, emerge il carattere leggermente sottosterzante della monoposto ET1, fino ad accelerazioni laterali di circa 1g, per poi diventare improvvisamente molto sottosterzante superato il valore del campo di gravità.

Come si vede, l'accelerazione laterale massima raggiungibile dalla monoposto, nel caso di modello senza inerzia delle ruote è di circa 1.7g (curva verde e blu si ricalcano in modo esatto, come da previsione), mentre di 1.3 g nel caso di modello reale.

Da notare come, durante la sessione di prove su pista, sia stata misurata in effetti proprio l'accelerazione laterale di circa 1.4g, a conferma della correttezza dei modelli sviluppati.

Interessante è riportare l'andamento del raggio di curvatura che caratterizza il moto del veicolo, durante questa rampa di velocità ad angolo di sterzo costante.

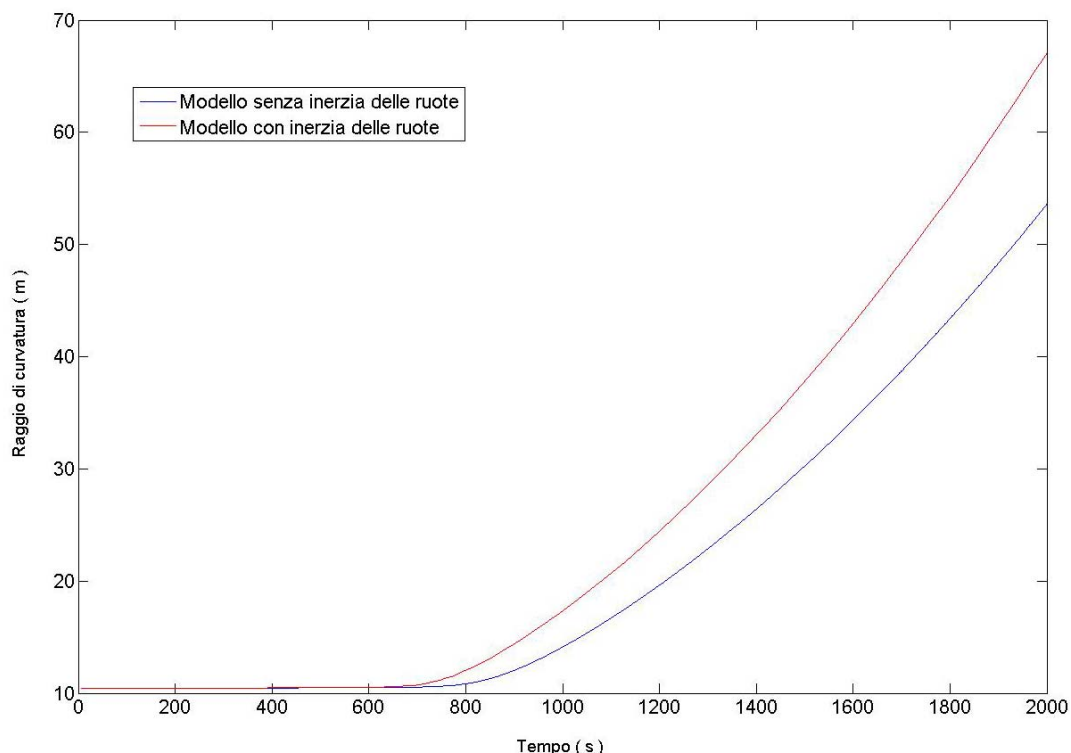


Fig 4.42 – Raggio di curvatura durante la manovra di Steering Pad ad angolo di sterzo costante

Fino alla velocità longitudinale di circa 10.5 m/s cui corrisponde l'accelerazione di circa 1g, il raggio di curvatura rimane praticamente costante.

Successivamente viene raggiunta la saturazione dei pneumatici, e il raggio di curvatura tende a divergere parabolicamente, portando quindi il veicolo ampiamente fuori dalla traiettoria iniziale.

5 Conclusioni

Il lavoro svolto ha consentito di sviluppare due modelli di simulazione per la monoposto FSAE dell'Università di Pisa.

L'ambiente di lavoro è interamente MATLAB, anche se come supporto esistono file sviluppati in ambiente Mathematica per l'ottenimento delle equazioni.

I modelli prendono vita in Simulink, ma per il loro funzionamento devono necessariamente essere supportati da file MATLAB.

I modelli sviluppati hanno la peculiarità di essere parametrici in tutti gli aspetti essenziali della progettazione della monoposto.

Come visto, la parametrizzazione non interessa solo aspetti semplici quali la definizione della massa del veicolo, ma interessa aspetti molto più profondi, come la definizione di tutto il tensore di inerzia sia della cassa che delle ruote e la definizione di tutte le proprietà geometriche.

Alla possibilità di modificare facilmente il tensore d'inerzia della monoposto, si somma la parametrizzazione della geometria delle sospensioni, fornendo un valore aggiunto al modello per niente trascurabile. In questo modo possono essere fatte in breve tempo numerose simulazioni delle manovre che la vettura effettua, individuando facilmente i comportamenti più corretti in funzione delle caratteristiche cinematiche delle sospensioni.

Inoltre i modelli possono essere utilizzati come supporto dell'attività sperimentale, consentendo di prevedere il comportamento della monoposto, e facilitando la messa a punto in funzione del tipo di manovra da effettuare.

Quanto detto rende i modelli sviluppati strumenti di simulazione molto potenti.

Le conclusioni che possono essere tratte da tutto il lavoro quindi sono le seguenti:

- sono stati sviluppati due modelli di simulazione per la dinamica della monoposto FSAE;
- l'aver considerato in modo rigoroso la presenza delle ruote è stata una scelta corretta per le differenze che in alcuni casi emergono nel confronto tra i modelli;
- il team dell'Università di Pisa dispone ora di un modello parametrico Simulink di monoposto;
- i modelli possono portare ad una caratterizzazione molto dettagliata del comportamento della monoposto, fino all'ottenimento di risultati molto importanti;

Gli sviluppi futuri dell'attività sono molteplici.

A livello teorico, i modelli infatti possono essere ulteriormente migliorati. Anche se risultano completi dal punto di vista della dinamica del veicolo, possono essere ampliati molto, se integrati con numerosi altri sottosistemi della monoposto. In particolare il modello simulink può essere integrato con:

- caratteristiche di funzionamento del motore;
- funzionamento dell'impianto frenante;
- funzionamento della frizione;
- sistema di trasmissione finale;
- logica di attuazione della frizione e del cambio;

Con questi passaggi si può puntare alla realizzazione di un modello ancora più globale di veicolo che tiene conto contemporaneamente di numerosi aspetti di funzionamento, ampliando ancora di più le sue potenzialità nella simulazione delle manovre effettuate.

Passando ad aspetti più pratici, a breve termine è previsto di procedere con:

- implementazione dei modelli sul Simulatore di guida disponibile presso il D.I.M.N.P e rappresentato in figura;



Fig 5.1 – Simulatore di guida del D.I.M.N.P

- validazione sperimentale dei modelli;

Appendice - Descrizione dei modelli Simulink

In questa appendice è riportata una descrizione del layout dei due modelli Simulink elaborati per la monoposto.

Il primo modello è relativo alla traduzione, in tale ambiente, delle equazioni che governano la dinamica della monoposto nel caso in cui le masse e le inerzie non sospese siano identicamente nulle. Il secondo invece traduce le stesse equazioni di equilibrio nel caso in cui lo studio della dinamica non comporti ipotesi semplificative sulle masse non sospese.

0.1 Il modello Simulink di vettura FSAE senza inerzia delle ruote

L'interfaccia iniziale con il modello Simulink non è delle più semplici.

Esso infatti riflette la struttura matriciale delle equazioni di equilibrio scritte, presentando quindi necessariamente due blocchi principali che materializzano di fatto la matrice dei coefficienti e il vettore degli ingressi.

Le dimensioni dei blocchi sono inevitabilmente notevoli a causa dell'elevato numero di grandezze necessarie per poter costruire sia la matrice che il vettore degli ingressi.

A contribuire alla notevole estensione dei blocchi sono anche le dimensioni stesse dei due elementi, che infatti appartengono ad un sistema algebrico di dimensione 10.

Tutto è infine integrato con numerosi blocchi ausiliari alla sezione centrale, ma indispensabili per il funzionamento dell'intero sistema.

L'immagine sottostante rappresenta l'interfaccia iniziale con il modello di monoposto senza inerzia delle ruote.

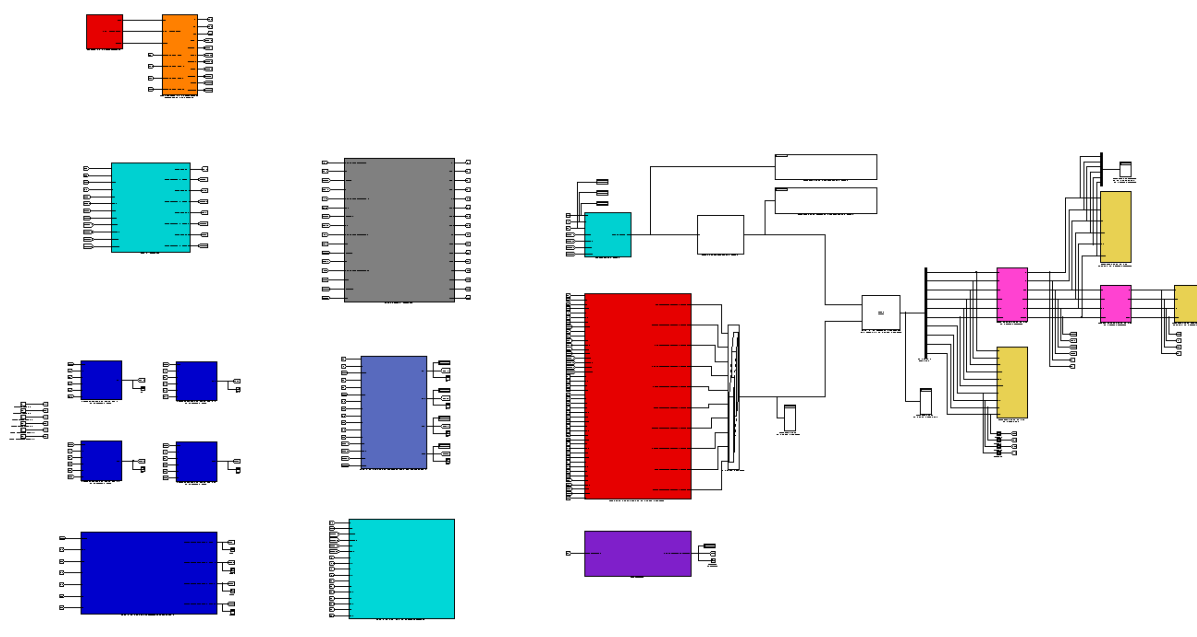


Fig 0.1 – Interfaccia iniziale con il modello di monoposto FSAE senza inerzia delle ruote

Per chiarire il layout dello schema, si elencano di seguito le funzioni dei vari blocchi, distinguibili per il loro diverso colore.

Nei successivi paragrafi sono invece trattati singolarmente con un livello di dettaglio non particolarmente raffinato.

- BLOCCO ROSSO in alto a sinistra : si occupa della definizione degli ingressi del pilota.
- BLOCCO ARANCIONE in alto a sinistra : al suo interno viene trattata la cinematica del sistema di sterzo e delle sospensioni.
- BLOCCO CELESTE in alto a sinistra : è adibito al calcolo dell'assetto dei pneumatici.
- BLOCCHI BLU (a sinistra dell'interfaccia) : quelli piccoli sono adibiti al calcolo delle posizioni verticali dei centri ruota nel sistema di riferimento della cassa. Quello più grande serve per il calcolo delle velocità relative di escursione.
- BLOCCO GRIGIO al centro : al suo interno si trovano le curve caratteristiche dei pneumatici per il calcolo delle azioni che provengono dalla strada.
- BLOCCO BLU CHIARO : è adibito al calcolo delle componenti ortogonali all'asse ruote delle velocità di traslazione dei centri.
- BLOCCO CELESTE in basso : non fornisce nessun segnale da restituire al sistema. Si occupa del calcolo della coppia al volante.

- BLOCCO CELESTE PICCOLO al centro dello schema : al suo interno viene creata la matrice dei coefficienti.
- BLOCCO ROSSO al centro dello schema : è il blocco più grande di tutto il sistema. Al suo interno ci sono le componenti che formano il vettore dei termini noti del sistema matriciale di equazioni.
- BLOCCO VIOLA al centro in basso : è adibito al calcolo delle azioni aerodinamiche.
- BLOCCHI BIANCHI : sono blocchi operazionali. Quello in uscita dalla matrice dei coefficienti si occupa della sua inversione, mentre l'altro si occupa di effettuare il prodotto tra l'inversa della matrice e il vettore degli ingressi.
- BLOCCHI MAGENTA : al loro interno avviene il processo di integrazione delle componenti del vettore delle incognite. Nel primo transitano quelle che devono essere integrate almeno una volta, mentre nel secondo transitano quelle che devono essere anche una seconda volta.
- BLOCCHI GIALLI : sono 3 e si occupano di visualizzare tutti gli stadi delle componenti del vettore delle incognite. Il primo visualizza il vettore vero e proprio, il secondo l'effetto dell'integrazione delle componenti che necessitano almeno di una integrazione, e l'ultimo si occupa della visualizzazione della doppia integrazione delle componenti.

0.1.1 La matrice dei coefficienti e il vettore degli ingressi

Come anticipato, tutto lo schema è centrato sulla costruzione di due elementi principali quali la matrice dei coefficienti ed il vettore degli ingressi.

Questi due sottosistemi materializzano il sistema lineare algebrico a coefficienti variabili che riassume tutte le equazioni della dinamica del veicolo.

Come visto nel capitolo 2, la risoluzione del sistema per la determinazione del vettore delle incognite, nonché del vettore delle derivate massime, avviene attraverso il prodotto tra l'inversa della matrice dei coefficienti ed il vettore degli ingressi.

Il "flusso di informazioni" che nasce da questa operazione, dà vita ad un vettore di dimensione 10 che è il vettore delle incognite, le cui componenti (non tutte in realtà) devono essere integrate per poter disporre di grandezze a priori incognite ma necessarie per la costruzione della matrice stessa e del vettore allo step successivo, oltre che a quella di tutti i blocchi ausiliari. La seguente immagine raffigura il corpo centrale dello schema.

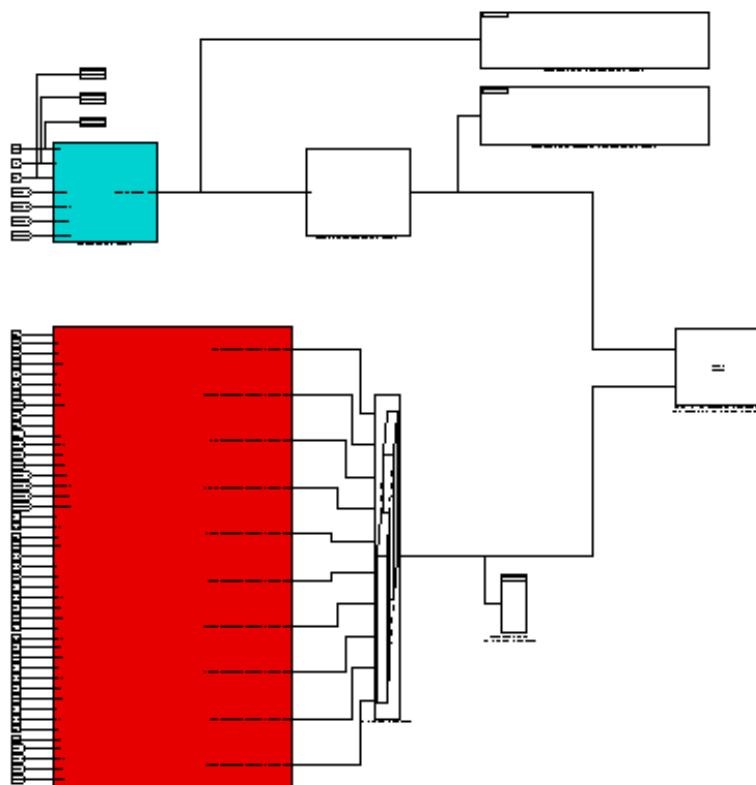


Fig 0.2 – Cuore del modello della monoposto

Come visibile, sia la matrice dei coefficienti che il vettore degli ingressi sono costruiti mediante numerosi ingressi introdotti grazie a blocchetti “ripetitori” di tipo FROM che ripetono il segnale di una ben precisa grandezza prelevata altrove e inviata al blocchetto “motrice” denominato GOTO. Ovviamente è necessario che affinché avvenga il matching tra il blocchetti di passaggio del segnale, questi siano nominati nello stesso modo.

I due blocchi principali rappresentati in figura quindi creano la matrice e il vettore. La matrice dei coefficienti deve essere poi invertita.

Per questo l'uscita da tale blocco deve essere inviata ad un blocco operativo che effettua tale operazione. Successivamente è localizzato un blocco operativo che effettua il prodotto tra i due elementi per fornire in uscita il vettore delle incognite. Ad affiancare i cuore dello schema sono posizionati tre DISPLAY che visualizzano i valori numerici delle grandezze che prelevano. Nel caso in esame quindi, viene visualizzata la matrice dei coefficienti, la sua inversa ed il vettore degli ingressi. I blocchetti in esame hanno dunque visivamente la sembianza di una matrice di un vettore. Il loro scopo è quello di far vedere numericamente a quanto ammonta per esempio, il valore di una componente del vettore o di un pivot delle matrici, in modo da individuare eventuali asimmetrie nelle componenti.

0.1.1.1 La matrice dei coefficienti

Esplorando il sistema principale dello schema, e scendendo ad un livello di dettaglio superiore della matrice dei coefficienti, l'interfaccia che si ha all'apertura del blocco è la seguente.

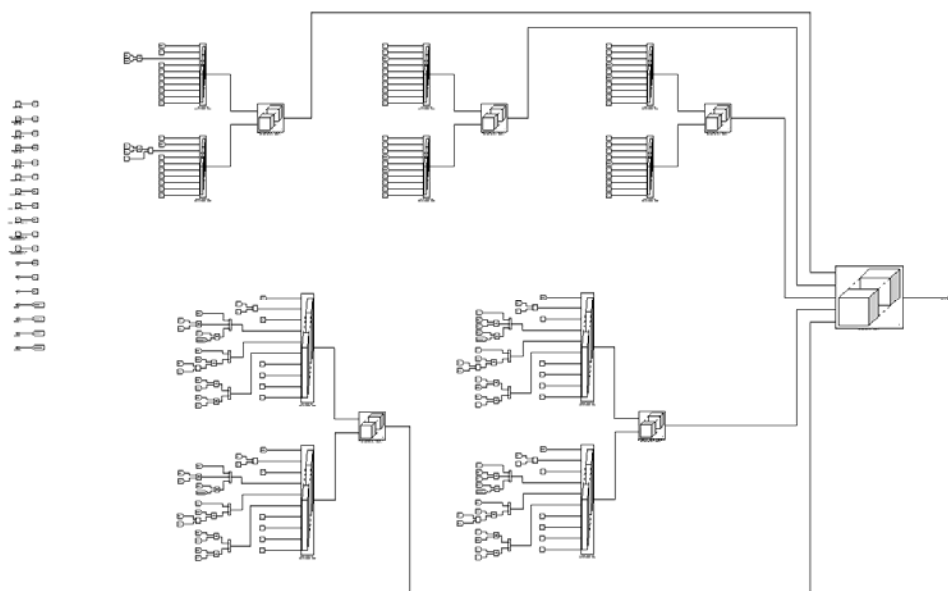


Fig 0.3 – Struttura della matrice dei coefficienti

In questa interfaccia vengono rappresentate le 10 colonne della matrice ognuna delle quali è creata attraverso un elemento di tipo MATRIX CONCATENATE che raccoglie in sequenza le singole componenti della colonna.

Per semplicità le colonne sono state successivamente accoppiate due a due (prima e seconda, terza e quarta, ...) per poi essere inviate ad un unico elemento di concatenazione che origina la matrice vera e propria.

Nell'ambiente della matrice sono ovviamente presenti gli ingressi necessari alla sua costruzione ma anche grandezze di tipo costante, come per esempio la massa della cassa, che quindi possono essere semplicemente originate internamente al blocco attraverso dei semplici blocchetti di tipo CONSTANT.

Gli ingressi sono tutti localizzati sulla sinistra dell'interfaccia grafica.

Nell'immagine seguente è rappresentata la modalità di costruzione di una delle colonne della matrice, la settima, che rispecchia la modalità di costruzione di tutte le altre.

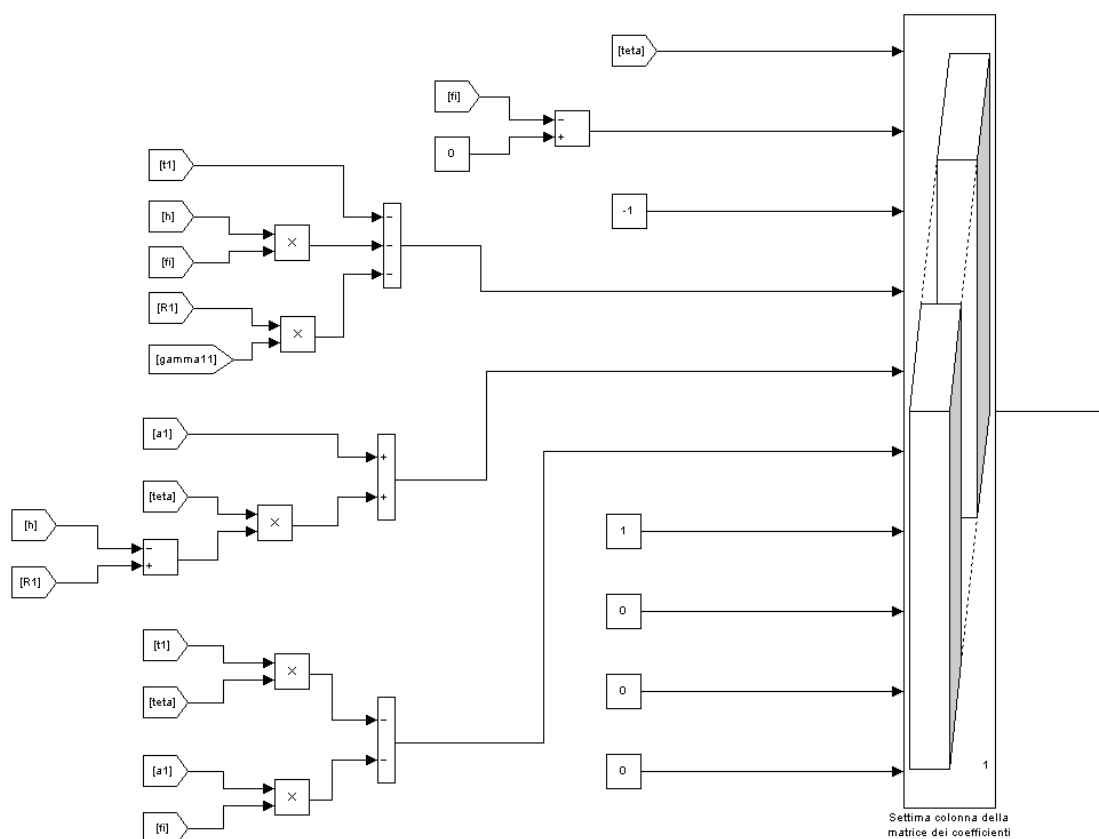


Fig 0.4 – Esempio di costruzione di una colonna (7°) della matrice

0.1.1.2 Il vettore degli ingressi

Anche il vettore degli ingressi è stato costruito con la stessa logica, ovvero assemblando le 10 componenti che lo materializzano. Ognuna di queste però è mascherata da un proprio sottosistema che rende la costruzione più gestibile. Nella successiva immagine viene rappresentato l'esplorazione del vettore degli ingressi.

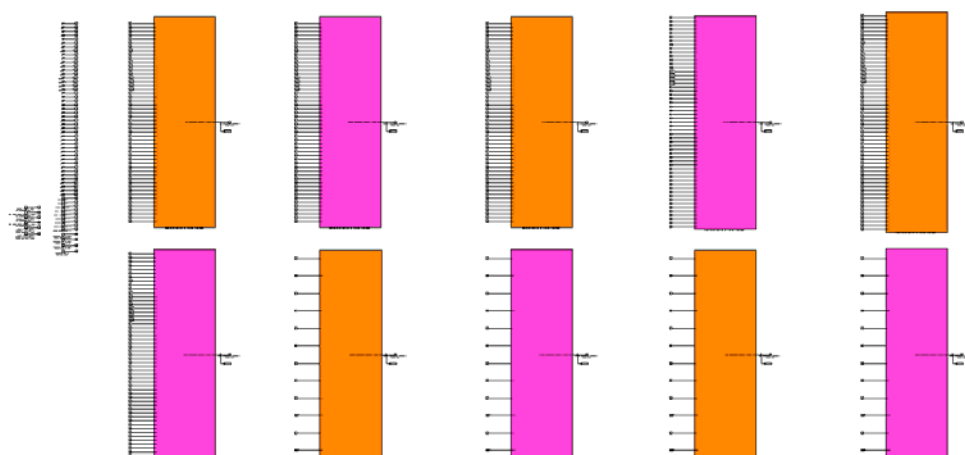


Fig 0.5 – Ambiente delle componenti del vettore degli ingressi

Le componenti pari del vettore sono rappresentate di color Magenta, mentre quelle dispari di colore arancione.

Come si vede, anche la struttura del vettore non è delle più semplici. Per questo ogni componente viene realizzata all'interno di un singolo sottosistema. Valgono le stesse considerazioni relative alla matrice per quanto riguarda la necessità di portare le grandezze di interesse all'interno di tale blocco, sia per quanto riguarda quelle variabili che quelle costanti. Di seguito è rappresentata una componente, la numero 10, come esempio per le altre dal punto di vista della costruzione del sottosistema. Al suo interno è localizzata la caratteristica elastica della sospensione, grazie alla Lookup Table, il blocco per il calcolo della forza smorzante a centro ruota, grazie ad un semplice GAIN e quello che si occupa del funzionamento della barra di torsione (blocco viola).

Ovviamente è poi localizzato l'algoritmo che consente di creare il termine noto della decima equazione di equilibrio del sistema.

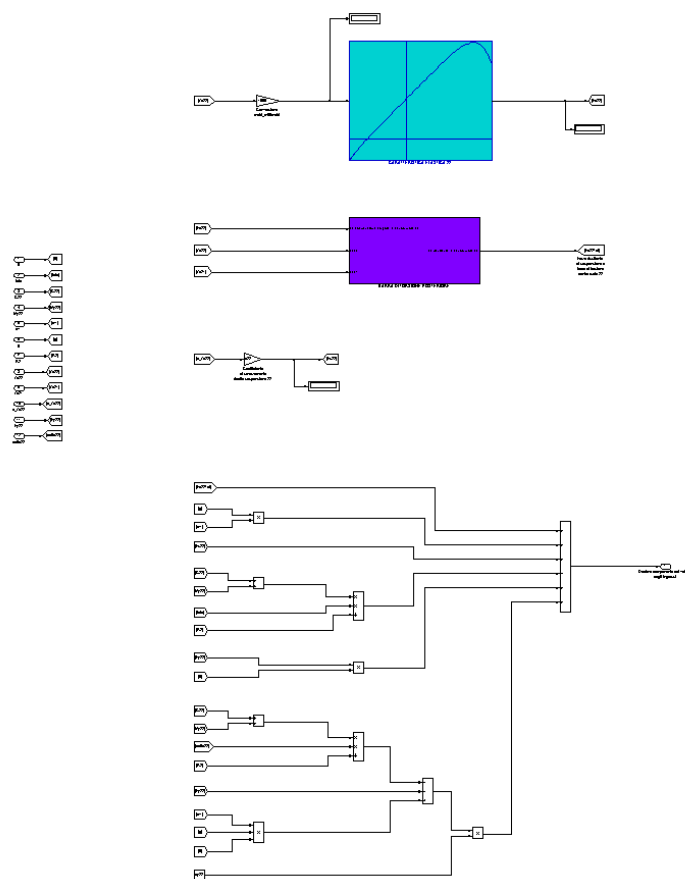


Fig 0.6 – Decima componente del vettore

0.1.2 La linee di integrazione e la visualizzazione delle grandezze

Alla parte di schema appena vista è associata la funzione di calcolo delle componenti del vettore delle incognite.

Nel presente schema di vettura FSAE senza inerzia delle ruote, le ultime 4 componenti del vettore delle incognite sono le forze verticali agenti sui pneumatici.

Queste componenti non hanno bisogno di essere integrate perché il loro integrale temporale non assume alcun significato fisico di interesse. Le prime 6 componenti invece devono necessariamente essere integrate per poter “chiudere il cerchio” e fornire un valore matematico a tutte le espressioni in cui sono richiamate le grandezze calcolate con ordine di derivazione inferiore. Ecco dunque che nascono le linee di integrazione.

La nascita avviene tramite un blocchetto DEMUX, di dimensione coerente con quella del sistema, che evidenzia le singole componenti del vettore delle incognite.

Tale vettore è formato, come appena detto, da 10 componenti di cui le ultime 4 sono le forze verticali a terra dei pneumatici.

Le prime 6 invece sono tutte componenti di accelerazione lineare e angolare riferite alla cassa, dalla cui integrazione è possibile ricostruire il moto della cassa, che in questo modello è quello che complessivamente descrive la dinamica della vettura FSAE.

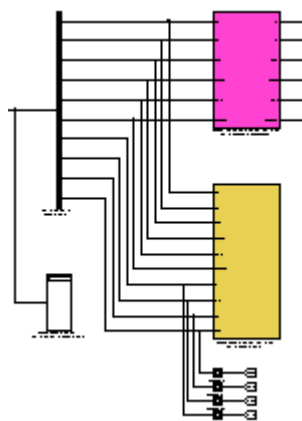


Fig 0.7 – Primo integratore e primo visualizzatore

Le linee di integrazione che inizialmente nascono sono dunque 6.

Parallelamente allo sviluppo delle linee, è individuabile un frazionamento che convoglia tutte le uscite in un blocco chiamato “ VISUALIZZATORE DEL VETTORE DELLE INCOGNITE ” all’interno del quale sono localizzate, in fila, 10 finestre di visualizzazione SCOPE grazie alle quali è possibile visualizzare, anche in tempo reale, gli andamenti delle componenti del vettore delle incognite.

Questo distaccamento inoltre consente di prelevare i segnali di forza verticale dopo che questi sono passati in blocchetti MEMORY che evitano la nascita di Loop Algebrici, fornendo alle forze verticali il valore calcolato allo step precedente.

In questo modo, a livello tempistico, è come se anche i segnali di forza verticale entrassero all’interno di integratori scongiurando dunque la chiusura di una linea senza ritardi temporali.

Ecco quindi che nella parte centrale del modello sono visibili 6 linee che entrano in un blocco denominato “ PRIMO INTEGRATORE DEL VETTORE DELLE DERIVATE MASSIME ”.

Tale blocco fornisce in uscita 6 grandezze fisiche che sono l’integrale temporale delle prime 6 componenti del vettore delle incognite. Dalle 6 linee nasce un distaccamento che porta tali segnali in un blocco ausiliario denominato “ VISUALIZZATORE DEL VETTORE INTEGRATO DELLE DERIVATE MASSIME ” all’interno del quale, come per l’altro blocco di visualizzazione, sono presenti questa volta 6 finestre rappresentanti gli andamenti delle velocità che istante per istante caratterizzano il moto della cassa.

Dall’interfaccia di uscita del primo blocco di integrazione vengono inoltre prelevati i 6 segnali precedentemente integrati ed inviati ad elementi di tipo GOTO.

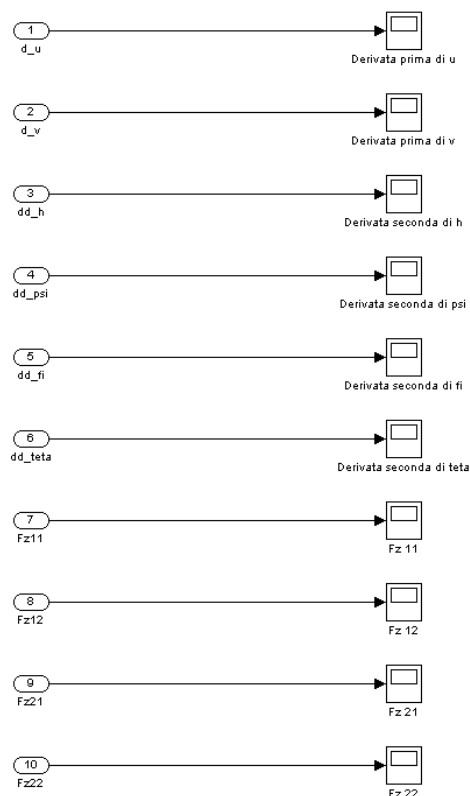


Fig 0.9 – Visualizzatore del vettore delle incognite

0.1.3 La sezione dei comandi pilota e la cinematica di sterzo e sospensioni

Uno dei sottosistemi ausiliari che circonda il nucleo centrale del modello è rappresentato da due blocchi che si occupano rispettivamente della definizione degli ingressi del pilota e della risposta della cinematica del sistema di sterzo e delle sospensioni.

La loro denominazione è rispettivamente “INGRESSI PILOTA E VISUALIZZAZIONE” e “USCITA INGRESSI PILOTA E CINEMATICA DELLE SOSPENSIONI”.

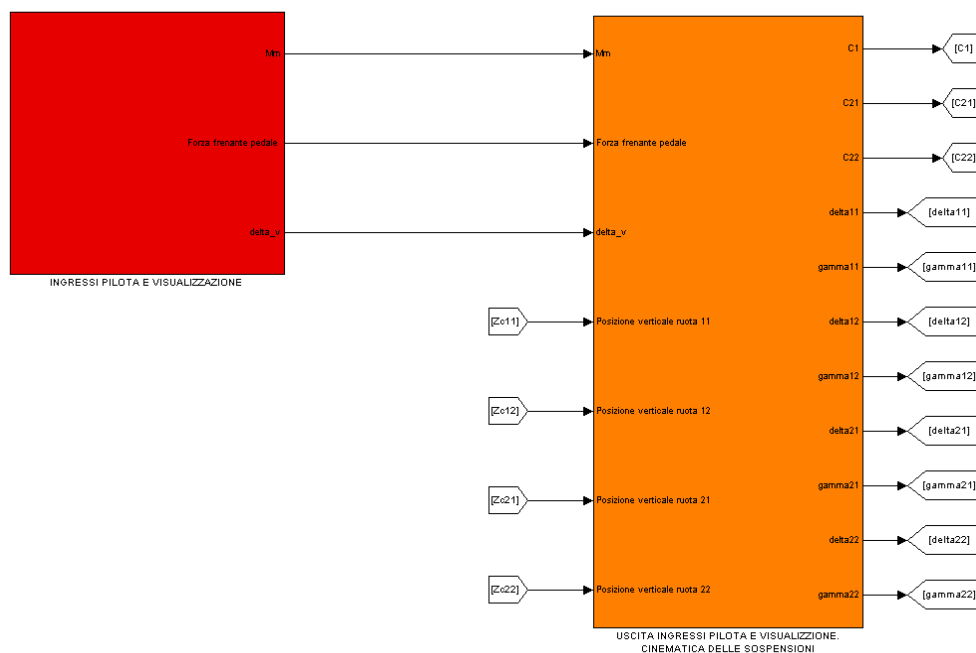


Fig 0.10 –Ingressi pilota e cinematica di sterzo e sospensioni

Il primo blocco è in realtà molto semplice. Al suo interno si trovano gli algoritmi che definisco le leggi temporali con cui il pilota agisce sulle interfacce con la monoposto, ovvero angolo di sterzo volante (espresso in gradi), momento motore erogato (espresso in Nm), e forza frenante agente sul pedale del freno (espressa in N).

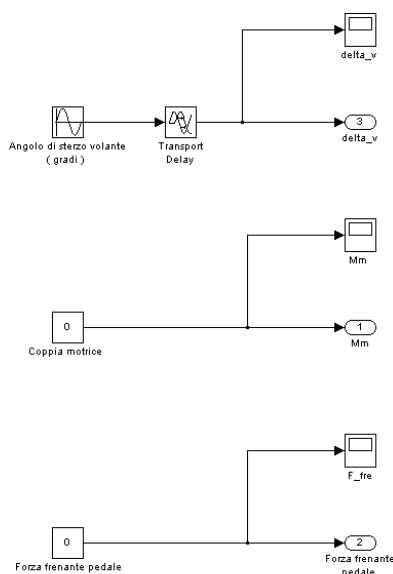


Fig 0.11 – Esempio di ingressi pilota : Sine Sweep senza erogazione di coppia motrice

La definizione degli algoritmi è del tutto arbitraria. Naturalmente deve rispettare la logica della tipologia della manovra attuata.

Si possono quindi trovare leggi di sterzo di tipo sinusoidale, piuttosto che colpi di sterzo, rampe, accompagnate da funzioni di coppia motrice costante piuttosto che nulla o stabilizzatrice della velocità di avanzamento del veicolo.

Il secondo blocco invece è più complesso perché riporta al suo interno le funzioni cinematiche delle sospensioni e del sistema di sterzo, come già anticipato nel capitolo relativo allo sviluppo delle equazioni della dinamica.

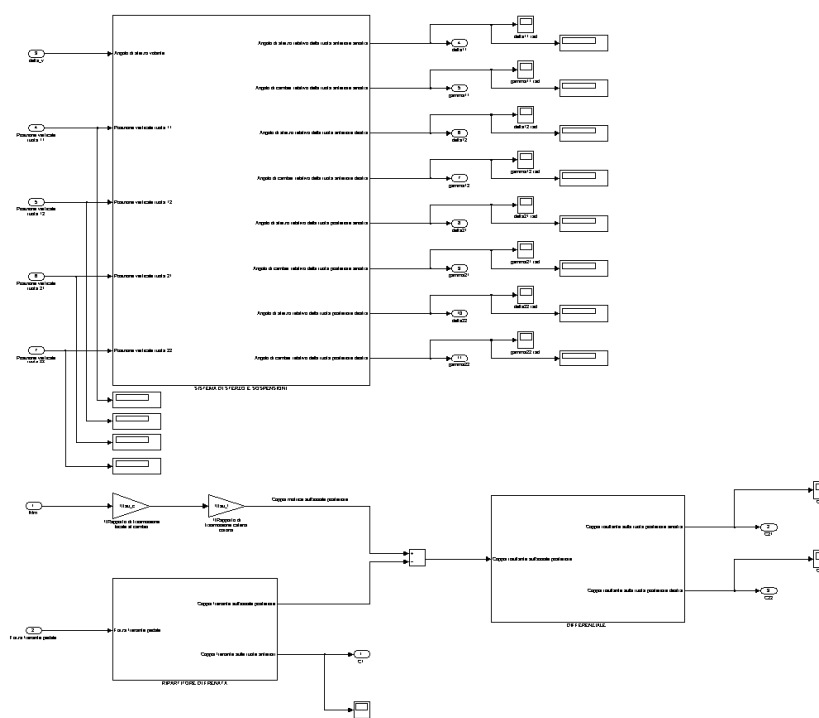


Fig 0.12 – Cinematica del sistema di sterzo e delle sospensioni

Impianto frenante e differenziale

All'interno di questo sottosistema ci sono due sezioni indipendenti che si occupano rispettivamente della pura cinematica del sistema di sterzo e delle sospensioni e della modalità di ripartizione di coppia motrice e frenante sulle quattro ruote.

Cominciando da quello più semplice, ovvero powertrain e impianto frenante, la logica di costruzione del blocco rispecchia direttamente il layout del sistema di trasmissione della potenza motrice e frenante.

L'attuale monoposto sviluppata dall'Ateneo di Pisa ET1 presenta il disco del sistema frenante posteriore direttamente montato sulla scatola del differenziale dove è anche direttamente montata la corona della trasmissione finale.

Questo comporta che la coppia risultante sulla scatola del differenziale è la somma algebrica di quella erogata dal motore (ovviamente corretta con i rapporti di trasmissione) e quella introdotta dall'impianto frenante. Questa è calcolabile tramite il fattore di ripartizione della frenata e il guadagno statico dell'impianto posteriore.

Analogo discorso vale per l'assale anteriore.

Per quanto riguarda invece la ripartizione di coppia tra le ruote posteriori, trattandosi di un modello che non presenta l'inerzia delle ruote, è ovviamente inevitabile eseguire una ripartizione equa tra le ruote posteriori, come avviene per un normale differenziale libero.

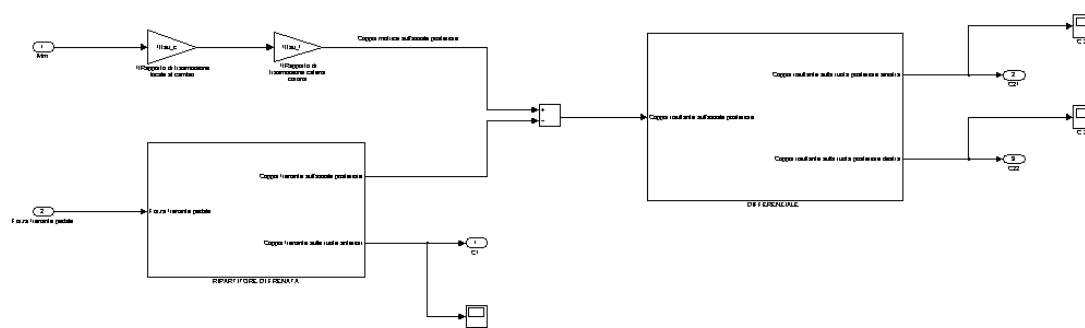


Fig 0.13 – Impianto frenante e differenziale

Nell'immagine rappresentata, il blocco inferiore a sinistra si occupa della definizione della logica di ripartizione della frenata, mentre quello di destra implementa la logica di funzionamento del differenziale, che in questo caso, come detto, è la più semplice possibile.

La trattazione invece del sottosistema che implementa la cinematica delle sospensioni è più complessa.

Come ingresso a questo blocco si hanno le posizioni verticali dei centri ruota nel sistema di riferimento della cassa e l'angolo di sterzo volante.

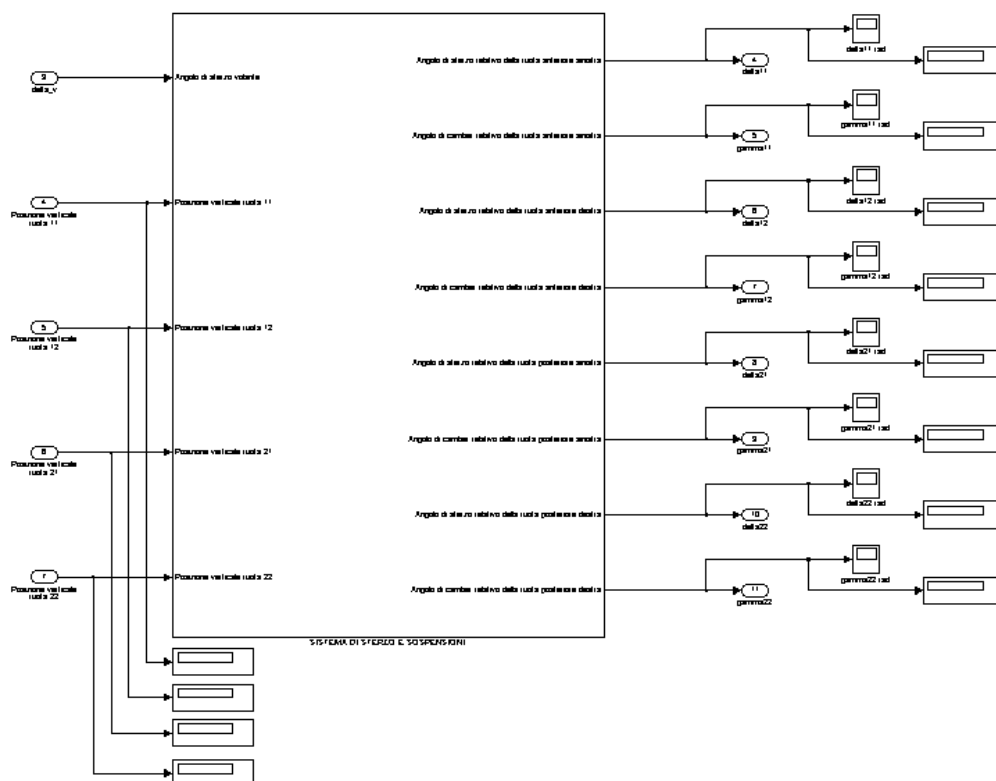


Fig 0.14 – Cinematica del sistema di sterzo e delle sospensioni

Con questi ingressi è possibile infatti tener conto della cinematica delle sospensioni anteriori e posteriori nell'ipotesi di trascurabilità delle deformazioni elastiche.

Le uscite infatti sono 8, ovvero 4 angoli di convergenza e 4 angoli di camber, ovviamente riferiti al sistema di riferimento della cassa.

Per calcolarli, all'interno del blocco ci sono due sottoblocchi, uno per ogni assale, che si occupano di effettuare il calcolo tramite Lookup Table predefinite ottenute, come visto nel capitolo 2, attraverso la risoluzione del sistema non lineare di 15 equazioni in 15 incognite che definisce la congruenza tra disposizione del mozzo, braccetti e punti di attacco.

Per l'assale anteriore sono quindi necessari 3 ingressi che sono le posizioni verticali dei centri ruota e l'angolo di sterzo volante, mentre per quello posteriore basta le sole posizioni verticali non essendo infatti presente un sistema di sterzo agente sull'assale.

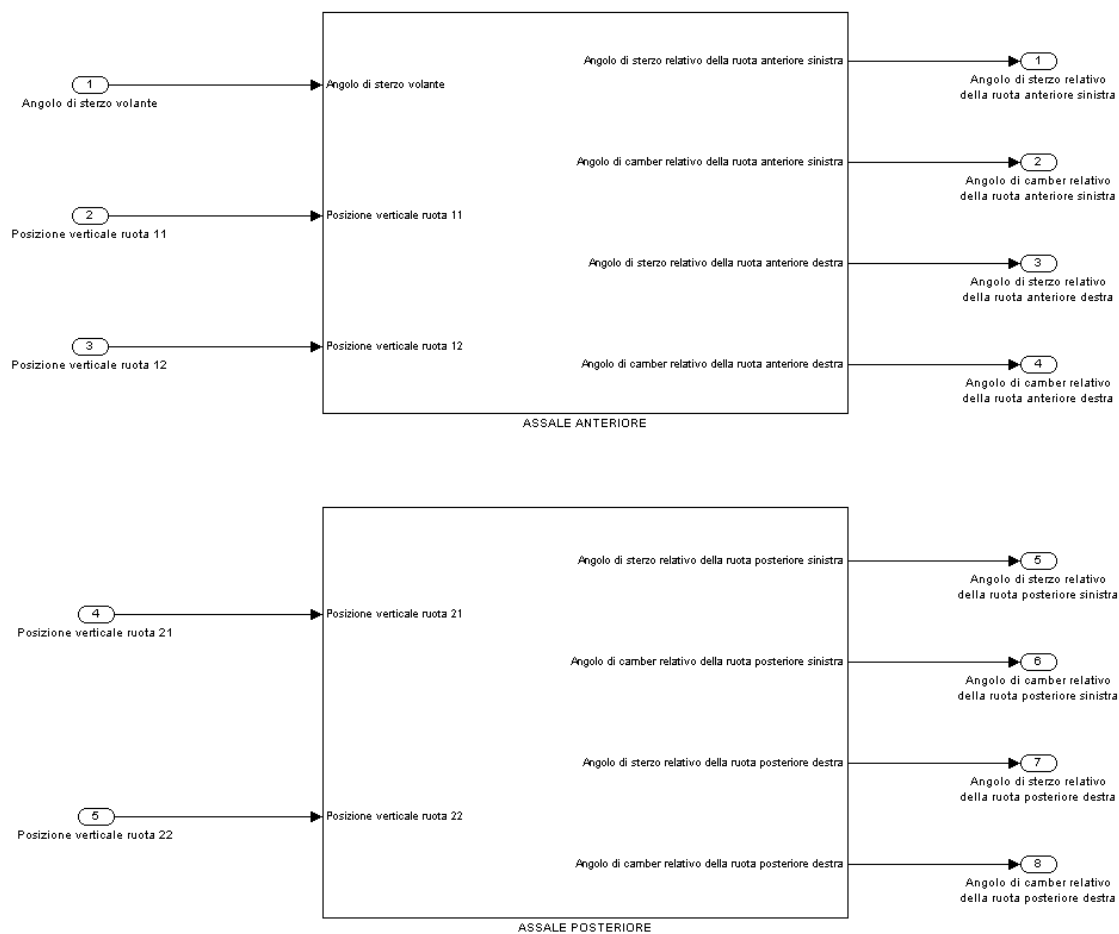


Fig 0.15 – Cinematica del sistema di sterzo e delle sospensioni

Esplorando i blocchi, all'interno di entrambi sono presenti Lookup Table 1D e 2D, rispettivamente per assale posteriore e anteriore, trattandosi infatti rispettivamente di cinematismi a un solo grado di libertà e a due gradi di libertà.

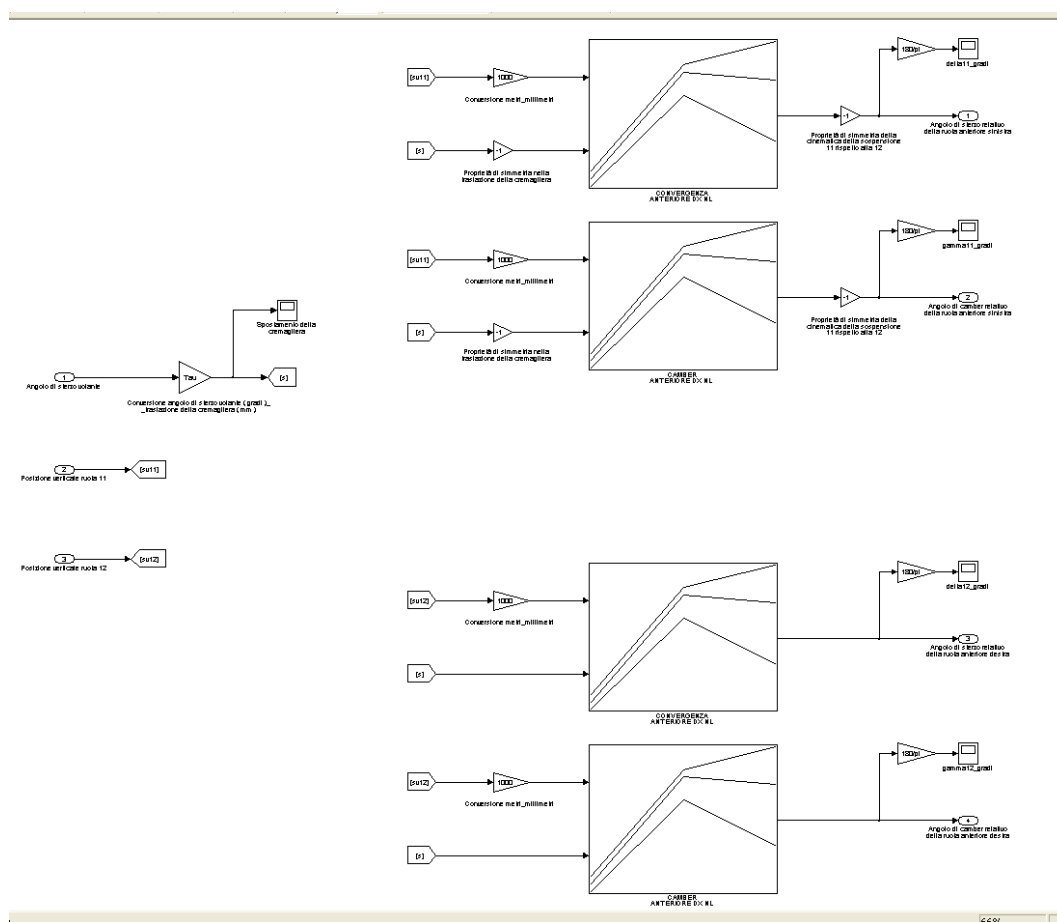


Fig 0.16 – Caratteristiche cinematiche delle sospensioni anteriori e posteriori

All'interno delle tabelle sono presenti superfici che definiscono le funzioni camber e convergenza delle sospensioni anteriori espressi in radianti. In realtà le curve appartengono ad una sola sospensione, perché per ricavare l'altra basta fare considerazioni di simmetria dell'effetto dell'escursione della sospensione sul moto del mozzo, ovvero di antisimmetria sugli angoli citati, e di "antisimmetria" dell'effetto di traslazione della cremagliera (ovvero di sterzata del volante) esplicitata dalla variabile s . Nelle immagini sottostanti sono riportate in sequenza le superfici di convergenza e camber della sospensione anteriore destra.

Le variabili di ingresso sono quindi la posizione verticale del centro ruota ($-100 \text{ mm} + 100 \text{ mm}$) e lo spostamento laterale della cremagliera ($-45 \text{ mm} + 45 \text{ mm}$).

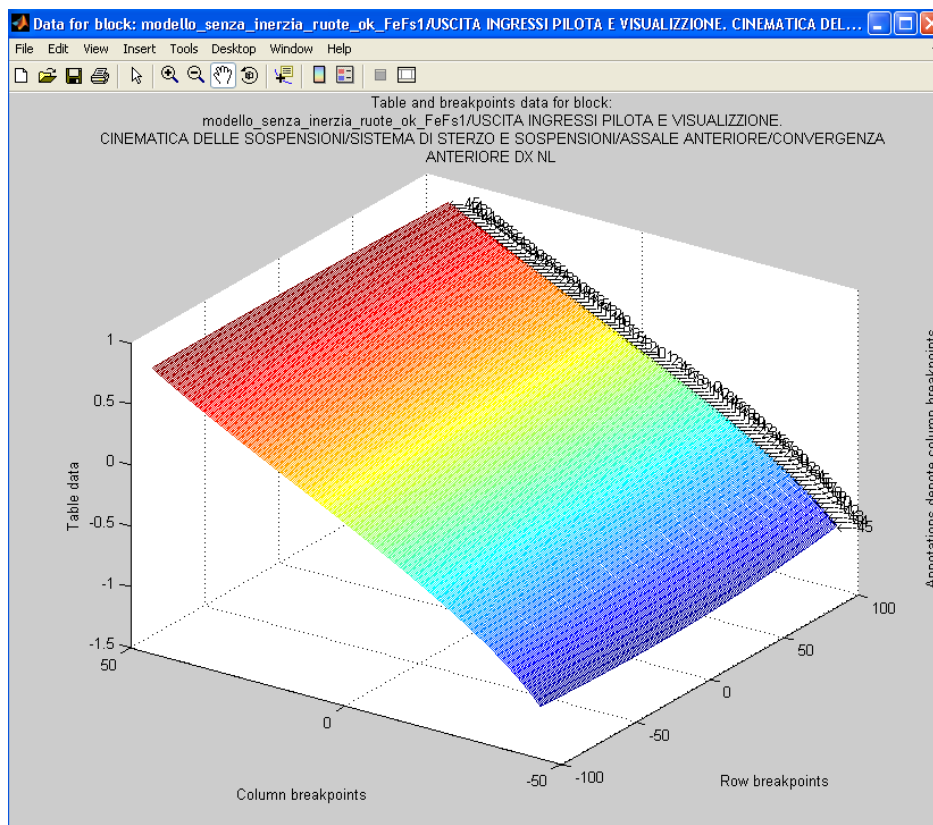


Fig 0.17 – Superficie di convergenza (rad) anteriore

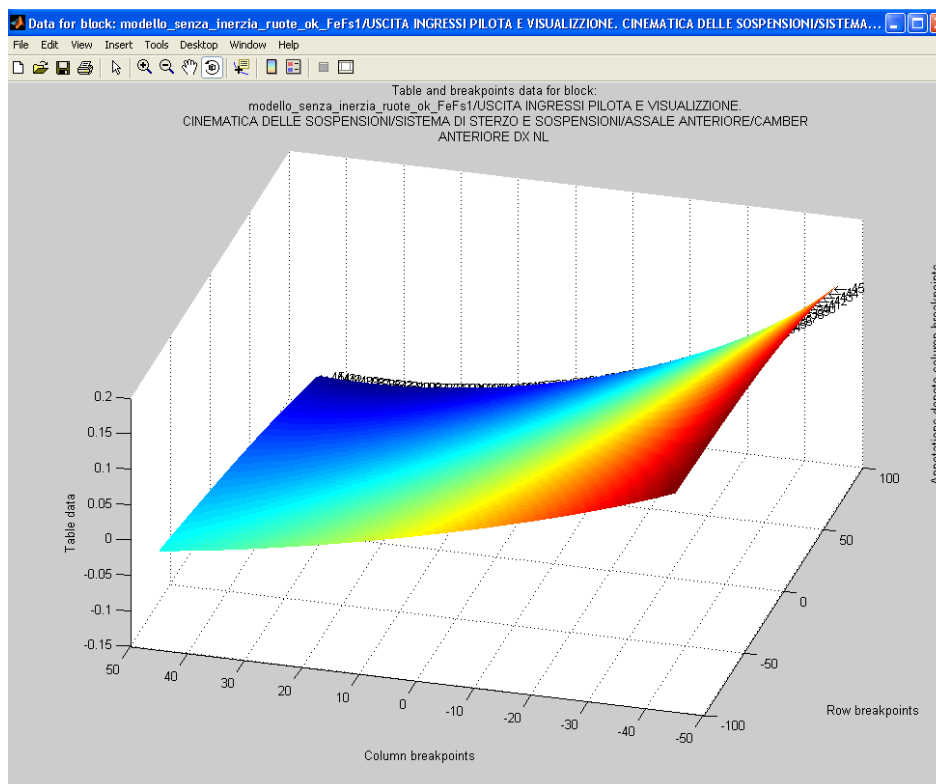


Fig 0.18 – Superficie di camber (rad) anteriore

Per quanto riguarda l'assale posteriore valgono invece considerazioni di perfetta simmetria del moto, dunque antisimmetria delle grandezze tra la ruota sinistra e destra non essendo presente il sistema di sterzo, per ottenere questa volta evidentemente curve invece che superfici.

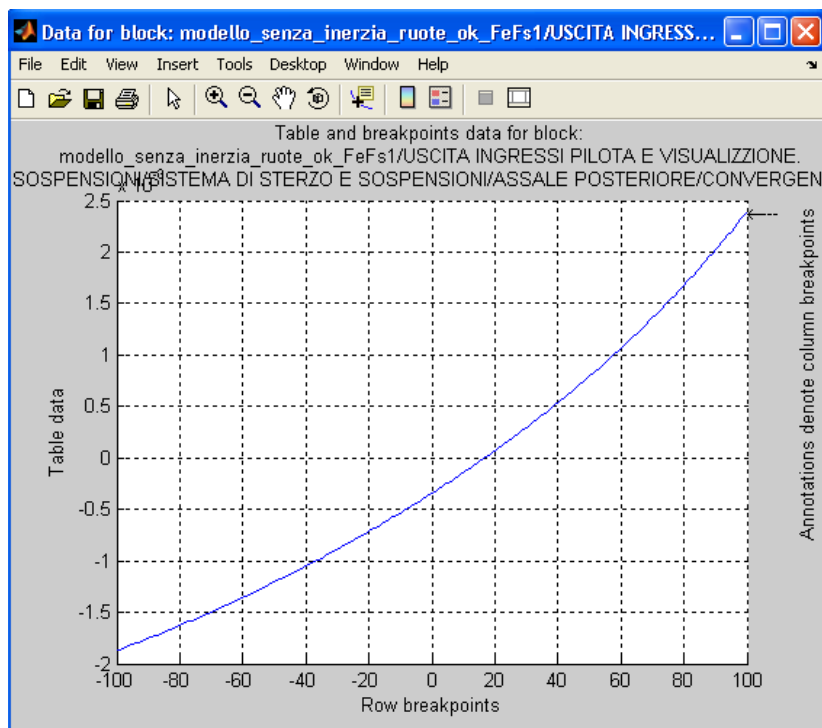


Fig 0.19 – Curva di convergenza (rad) posteriore

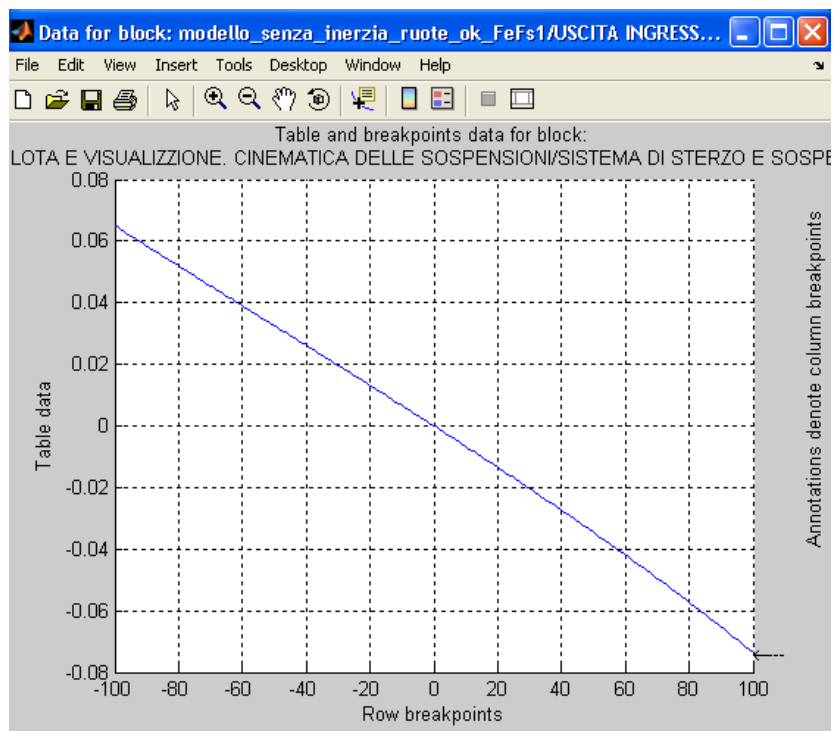


Fig 0.20 – Curva di camber (rad) posteriore

0.1.4 Escursioni e velocità di escursione dei centri ruota

Tra le varie grandezze di interesse che caratterizzano il moto del veicolo, si trovano le posizioni verticali e le velocità verticali di escursione dei centri ruota nel riferimento della cassa. In realtà queste grandezze non solo sono di interesse in quanto fini a loro stesse, ma servono anche per la costruzione del vettore degli ingressi precedentemente illustrato.

Ecco quindi la necessità di locare 8 blocchi che calcolano le 4 posizioni e le 4 velocità di escursione dei centri ruota. Le equazioni che servono per realizzare questi blocchi sono quelle di congruenza relative all'imposizione che il punto di contatto a terra del pneumatico abbia ovviamente coordinata z nel riferimento ausiliario nulla.

La derivazione temporale delle 4 equazioni fornisce automaticamente le 4 equazioni relative alle velocità. Vista la loro semplicità matematica, possono anche essere richiamate. Quelle relative alla posizione dei centri ruota sono le seguenti:

$$zC_{11} = R_1 - (h + t_1 \Phi) + a_1 \theta$$

$$zC_{12} = R_1 - (h - t_1 \Phi) + a_1 \theta$$

$$zC_{21} = R_2 - (h + t_2 \Phi) - a_2 \theta$$

$$zC_{22} = R_2 - (h - t_2 \Phi) - a_2 \theta$$

Quelle invece relative alle velocità, ottenute come detto per derivazione delle precedenti, sono invece:

$$\dot{z}C_{11} = -(\dot{h} + t_1 \dot{\Phi}) + a_1 \dot{\theta}$$

$$\dot{z}C_{12} = -(\dot{h} - t_1 \dot{\Phi}) + a_1 \dot{\theta}$$

$$\dot{z}C_{21} = -(\dot{h} + t_2 \dot{\Phi}) - a_2 \dot{\theta}$$

$$\dot{z}C_{22} = -(\dot{h} - t_2 \dot{\Phi}) - a_2 \dot{\theta}$$

I blocchi all'interno dello schema cui sono associate le espressioni delle posizioni verticali dei centri nel riferimento cassa sono rappresentati in figura:

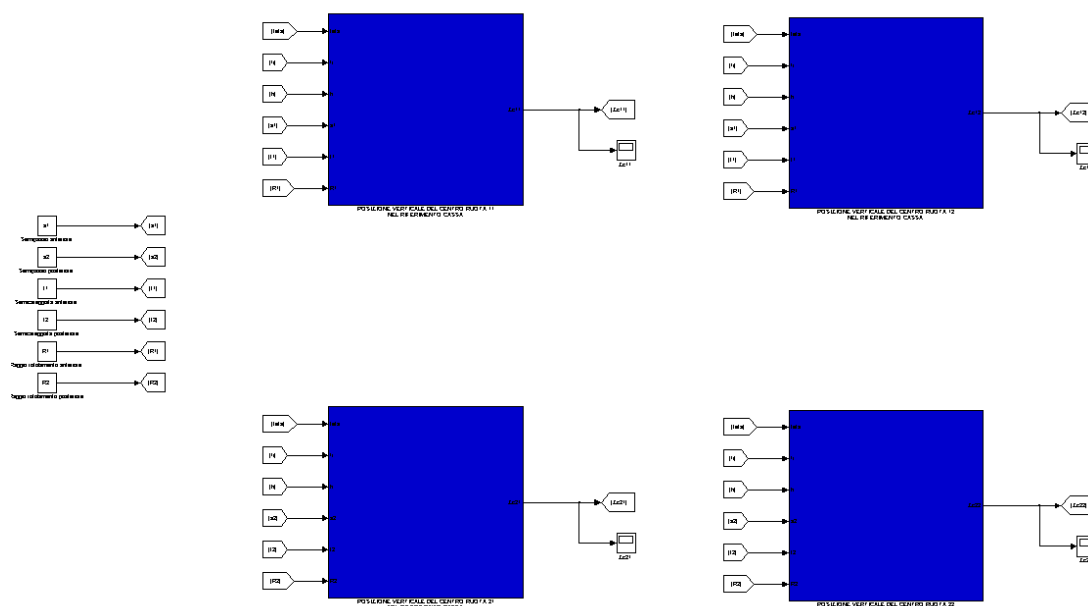


Fig 0.21 – Blocchi per il calcolo delle posizioni verticali

Per le velocità di escursione invece c'è un primo sottosistema all'interno del quale si trovano analoghi blocchi di calcolo.

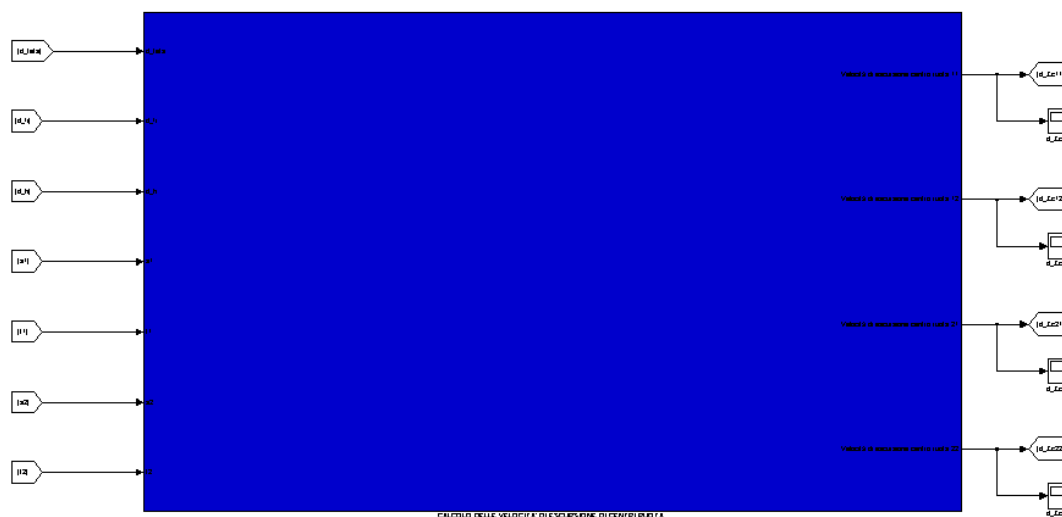


Fig 0.22 – Blocco di calcolo delle velocità di escursione

Esplorando al suo interno, si apre la seguente interfaccia:

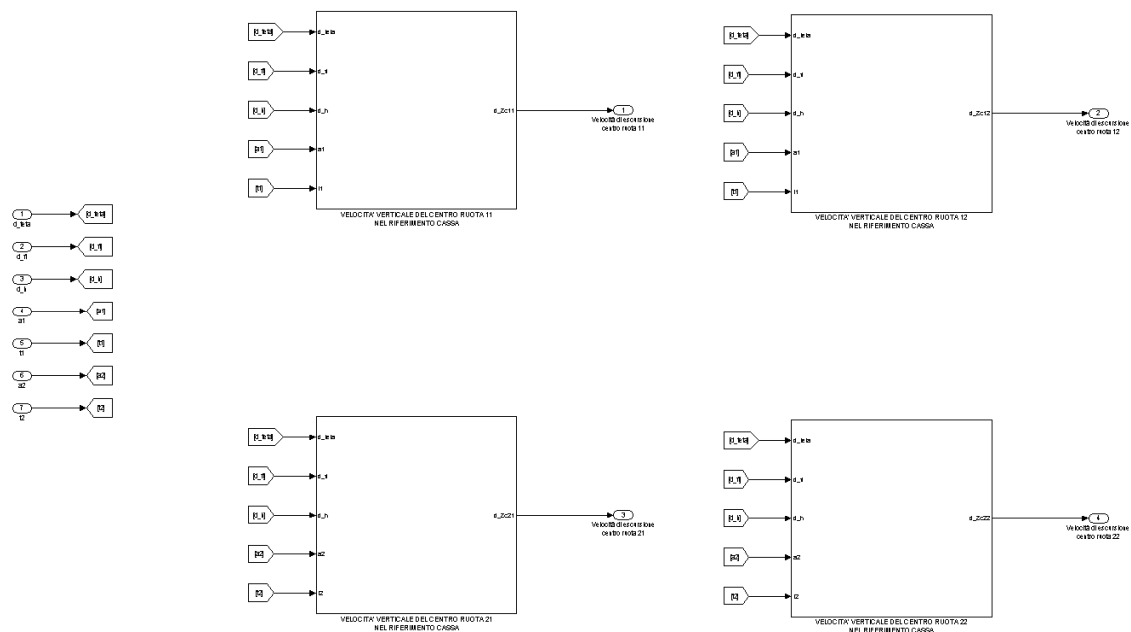


Fig 0.23 – Blocchi di calcolo delle singole velocità di escursione

Solo per illustrarne uno, relativo per esempio alle posizioni, quello che si trova al loro interno sono strutture di questo tipo:

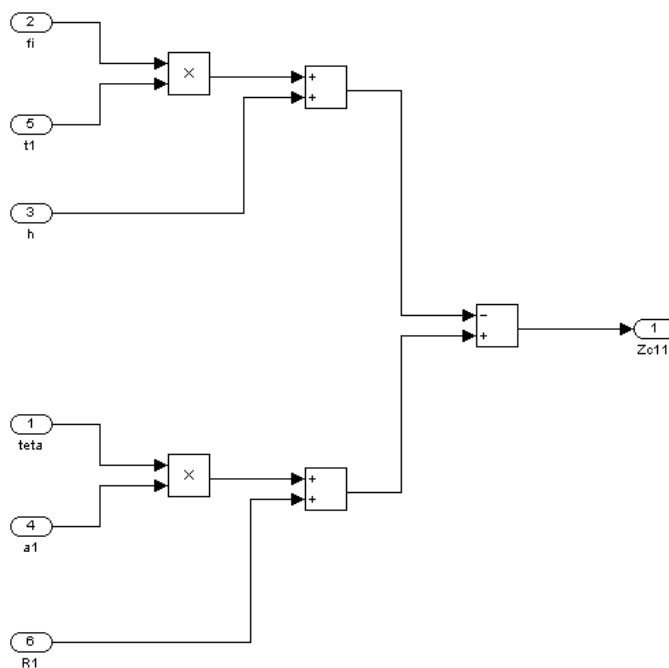


Fig 0.24 – Calcolo della posizione del centro ruota 11

0.1.5 Assetto dei pneumatici

Un blocco molto importante è quello che si occupa del calcolo degli angoli di assetto dei pneumatici, ovvero angolo di deriva e angolo di camber. Ricordando le relazioni che definiscono gli angoli di camber effettivo e di sterzo a terra,

$$\gamma_{sij} = \gamma_{ij} + \phi \quad \text{e} \quad \delta_{sij} = \delta_{ij}$$

unitamente a quelle che definiscono le derivate per il modello piano di veicolo

$$\alpha_{11} = \delta_{11} - \arctan \frac{\dot{\psi} a + v}{u - t_1 \dot{\psi}} \quad \alpha_{12} = \delta_{12} - \arctan \frac{\dot{\psi} a + v}{u + t_1 \dot{\psi}}$$

$$\alpha_{21} = \delta_{21} - \arctan \frac{v - \dot{\psi} b}{u - t_2 \dot{\psi}} \quad \alpha_{22} = \delta_{22} - \arctan \frac{v - \dot{\psi} b}{u + t_2 \dot{\psi}}$$

si può quindi originare il blocco che implementa tali relazioni e rappresentato in figura.

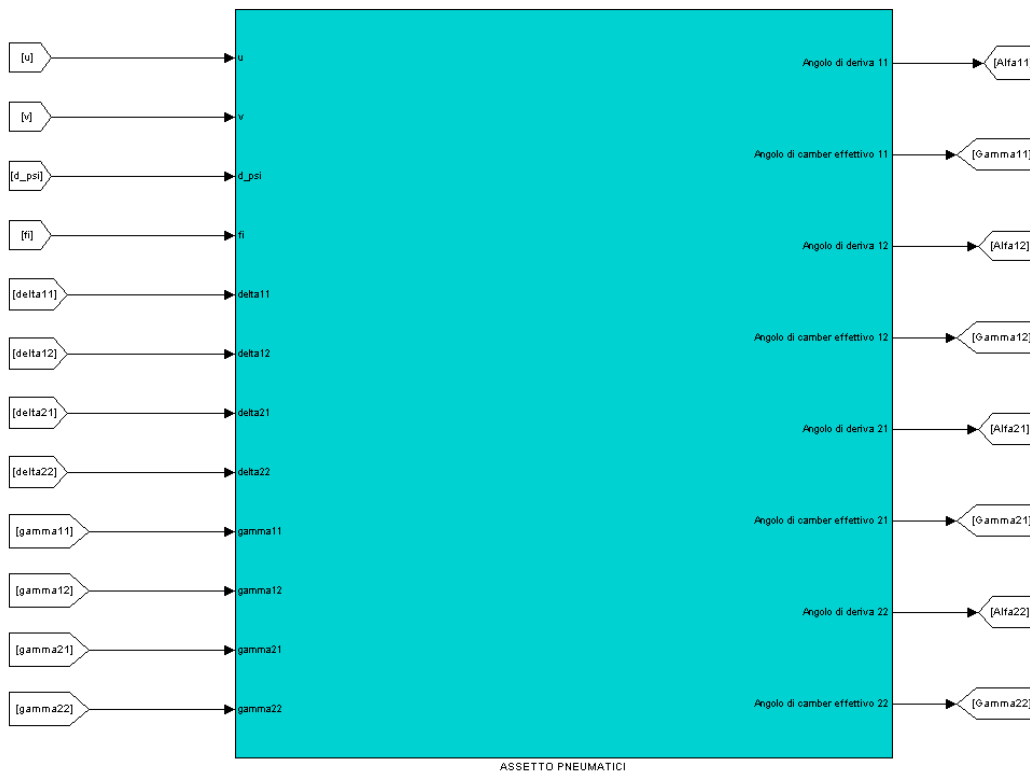


Fig 0.25 – Calcolo dell'assetto dei pneumatici

Esplorandolo, si incontrano 4 sottosistemi, uno per ruota, all'interno dei quali è sito lo schema per il calcolo di entrambi gli angoli. Ovviamente ogni blocco ha come ingressi le grandezze necessarie. La tipica interfaccia di ogni singolo blocco è raffigurata nell'immagine successiva, mentre al suo interno di trovano i semplici algoritmi sopra riportati.

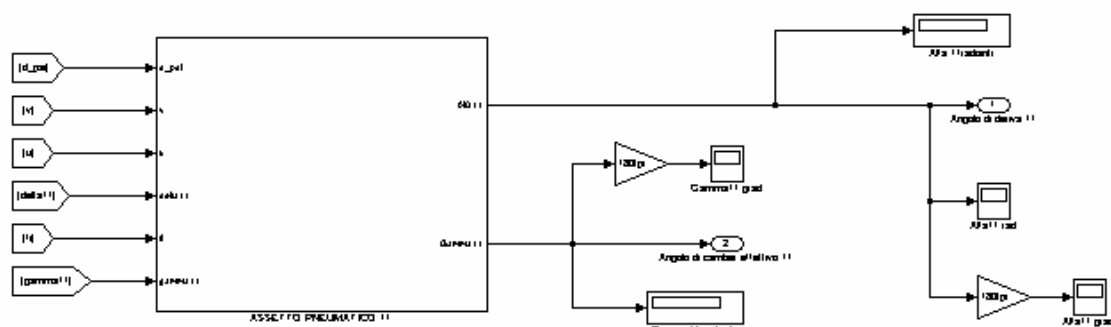


Fig 0.26 – Assetto del pneumatico 11

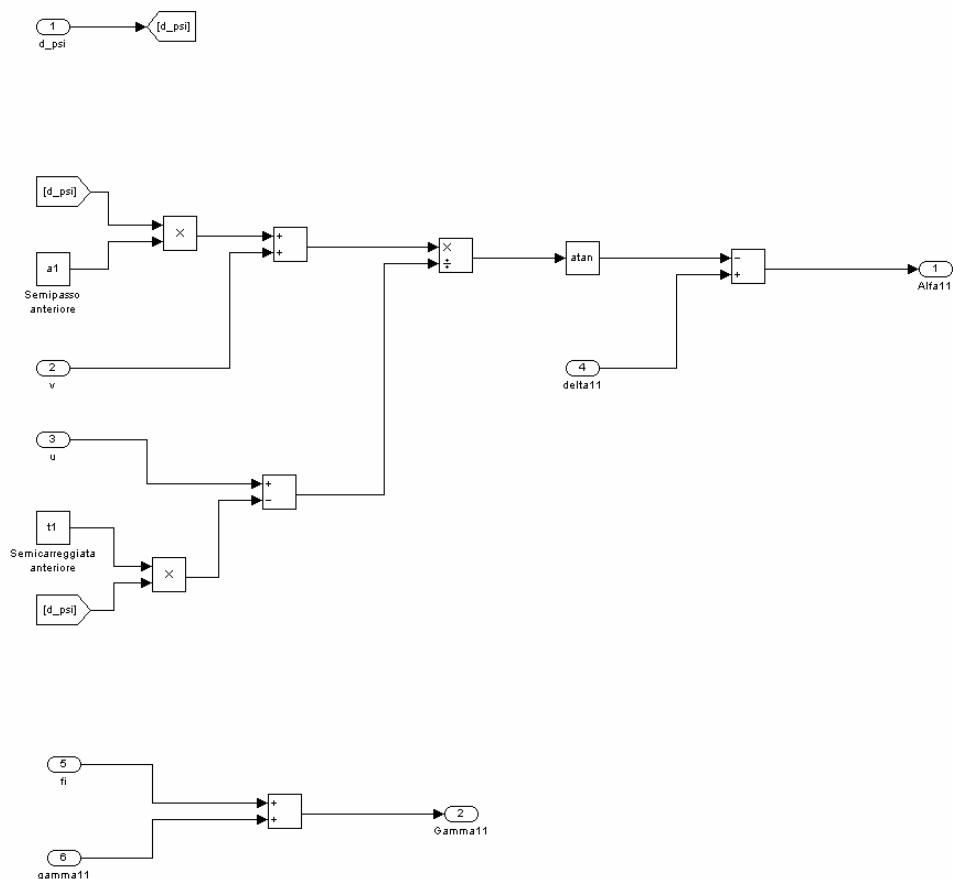


Fig 0.27 – Particolare dell'assetto del pneumatico 11

0.1.6 Calcolo delle velocità di avanzamento delle ruote

Nel seguente modello le ruote sono prive di inerzia, quindi il segnale di velocità angolare non è ottenibile con considerazioni di equilibrio.

Per calcolare la resistenza introdotta dal rotolamento dei pneumatici, si è visto (par 3.4.3) che servono le componenti ortogonali all'asse ruota delle velocità dei centri.

Il blocco blu chiaro effettua proprio questa operazione.

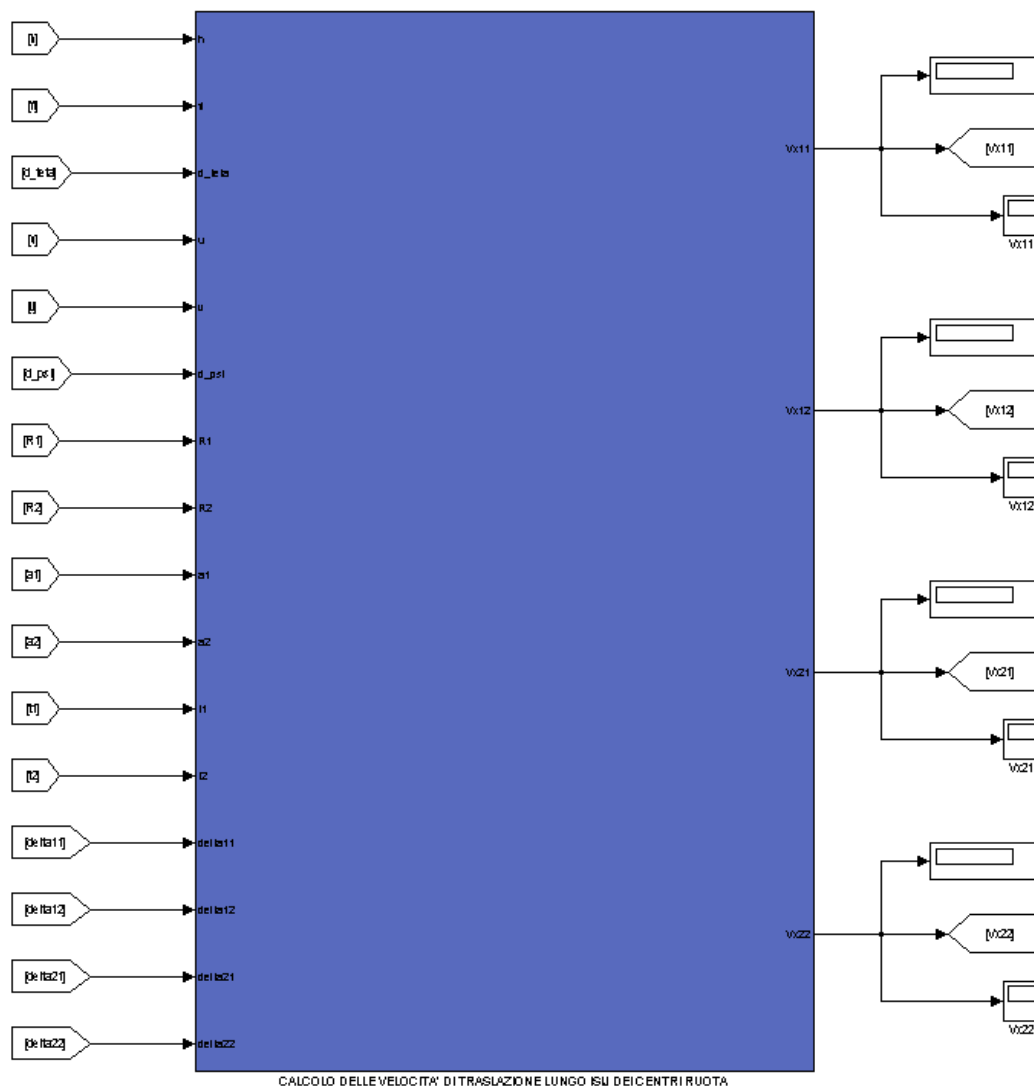


Fig 0.28 – Blocco per il calcolo delle componenti ortogonali
agli assi ruota delle velocità dei centri

0.1.7 Coppia al volante

Un blocco realmente ausiliario che non serve per far girare il modello, ma che semplicemente fornisce un'uscita a se stante, è quello relativo al calcolo della coppia al volante. Localizzato sotto il blocco del vettore degli ingressi, al suo interno presenta l'algoritmo di calcolo della coppia al volante ottenuto attraverso l'applicazione del principio dei lavori virtuali.

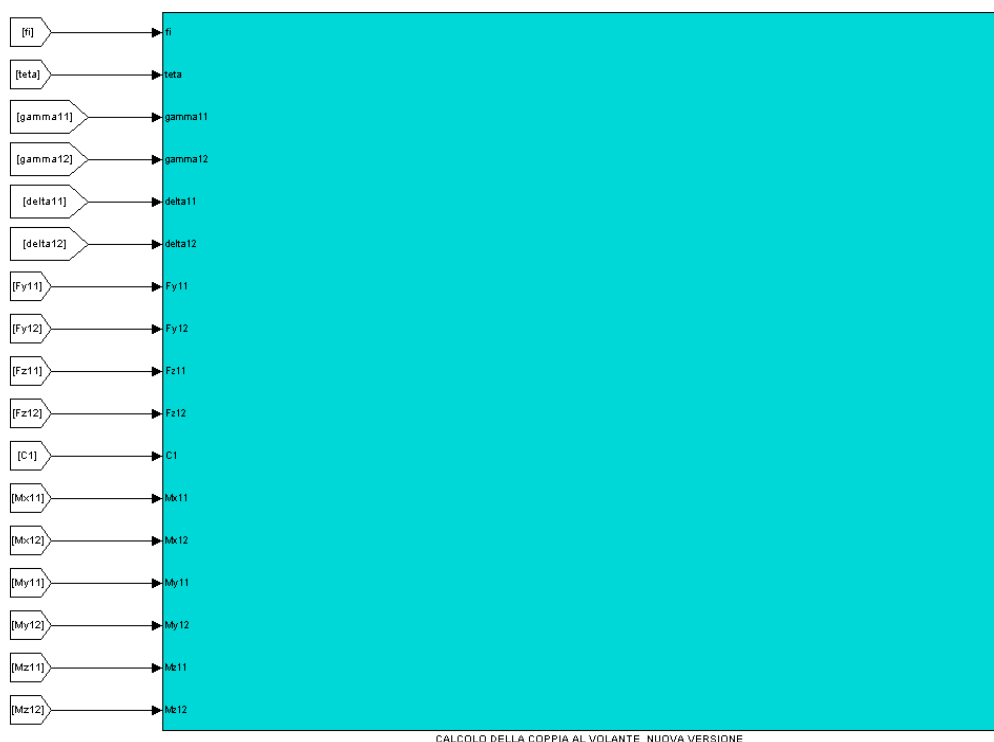


Fig 0.29 – Blocco per il calcolo della coppia di sterzo al volante

0.2 Il modello Simulink di vettura FSAE con inerzia delle ruote

Il modello Simulink di veicolo nel caso in cui si considera l'inerzia delle ruote strutturalmente è simile al precedente. Questo è ovviamente volutamente fatto per non modificare il layout di base di quello precedente.

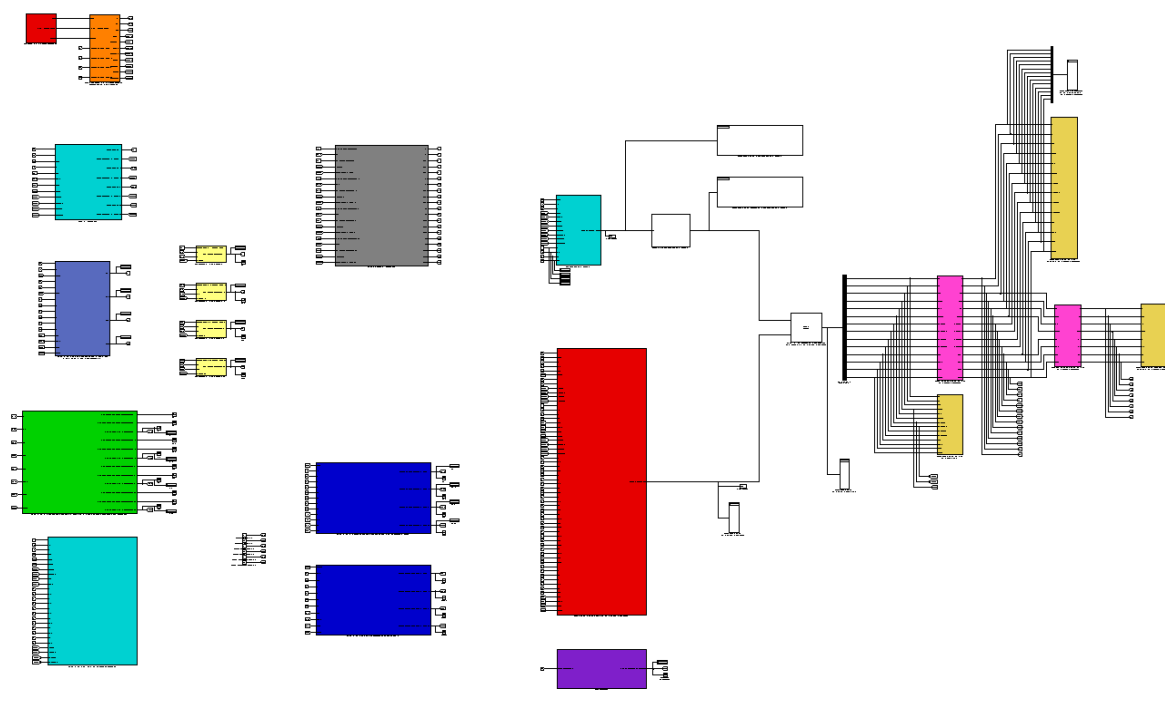


Fig 0.30 – Interfaccia iniziale del modello di monoposto con inerzia delle ruote

Ovviamente si tratta di un modello più esteso, perché questa volta il cuore del modello traduce un sistema di equazioni di dimensione 14 invece che 10.

Inoltre, la filosofia di costruzione del modello è stata quella di aver limitato al minimo il numero di equazioni prendenti parte al sistema matriciale. Per tutte quelle infatti, che in qualche modo potevano essere costruite a parte, sono stati adibiti blocchi singoli che in questo modo evitano l'integrazione delle equazioni “ausiliarie” all'interno di una struttura già abbastanza estesa.

Il cuore del sistema traduce quindi un sistema algebrico di 14 equazioni in 14 incognite. Le prime incognite 6 rimangono quelle del sistema precedente, dunque le 6 accelerazioni di cassa.

Le rimanenti 8 invece sono tutte relative alle 4 ruote e in particolare si dividono nelle 4 accelerazioni angolari e nelle 4 accelerazioni di compressione radiale dei pneumatici. Anche per questo modello si riporta un elenco relativo alla funzionalità dei blocchi.

- BLOCCO ROSSO in alto a sinistra : vedi precedente modello.
- BLOCCO ARANCIONE in alto a sinistra : vedi precedente modello.
- BLOCCO CELESTE in alto a sinistra : vedi precedente modello.
- BLOCCHI BLU (in basso al centro) : quello superiore è adibito al calcolo delle posizioni verticali dei centri ruota nel sistema di riferimento della cassa. Quello inferiore serve per il calcolo delle velocità relative di escursione.
- BLOCCO GRIGIO al centro : vedi precedente modello.
- BLOCCO CELESTE in basso : vedi precedente modello.
- BLOCCO BLU CHIARO a sinistra : è adibito al calcolo delle componenti longitudinali delle velocità dei centri ruota per il successivo calcolo degli scorrimenti longitudinali dei pneumatici.
- BLOCCO VERDE FLUORESCENTE : è adibito al calcolo delle forze verticali e dei rispettivi termini elastici e smorzanti.
- BLOCCHI GIALLI (piccoli) : sono adibiti al calcolo degli scorrimenti longitudinali dei pneumatici.
- BLOCCO CELESTE PICCOLO al centro dello schema : vedi precedente modello.
- BLOCCO ROSSO al centro dello schema : vedi precedente modello.
- BLOCCO VIOLA al centro in basso : vedi precedente modello.
- BLOCCHI BIANCHI : sono blocchi operazionali. Quello in uscita dalla matrice dei coefficienti si occupa della sua inversione, mentre l'altro si occupa di effettuare il prodotto tra l'inversa della matrice e il vettore degli ingressi.
- BLOCCHI MAGENTA : al loro interno avviene il processo di integrazione delle componenti del vettore delle incognite. Nel primo transitano quelle che devono essere integrate almeno una volta, mentre nel secondo transitano quelle che devono essere anche una seconda volta.
- BLOCCHI GIALLI : sono 3 e si occupano di visualizzare tutti gli stadi delle componenti del vettore delle incognite. Il primo visualizza il vettore vero e proprio, il secondo l'effetto dell'integrazione delle componenti che necessitano almeno di una integrazione, e l'ultimo si occupa della visualizzazione della doppia integrazione delle componenti.

0.2.1 La matrice dei coefficienti e il vettore degli ingressi

La sezione relativa alla matrice dei coefficienti e al vettore degli ingressi non cambia in niente se non in termini di dimensione ampliandosi di 4 unità.

La metodologia di costruzione adottata in realtà non è stata la stessa.

L'elevato numero di termini in più sia nella matrice che nel vettore degli ingressi ha obbligato ad adottare metodologie di costruzione di matrice e vettore differenti dal precedente modello.

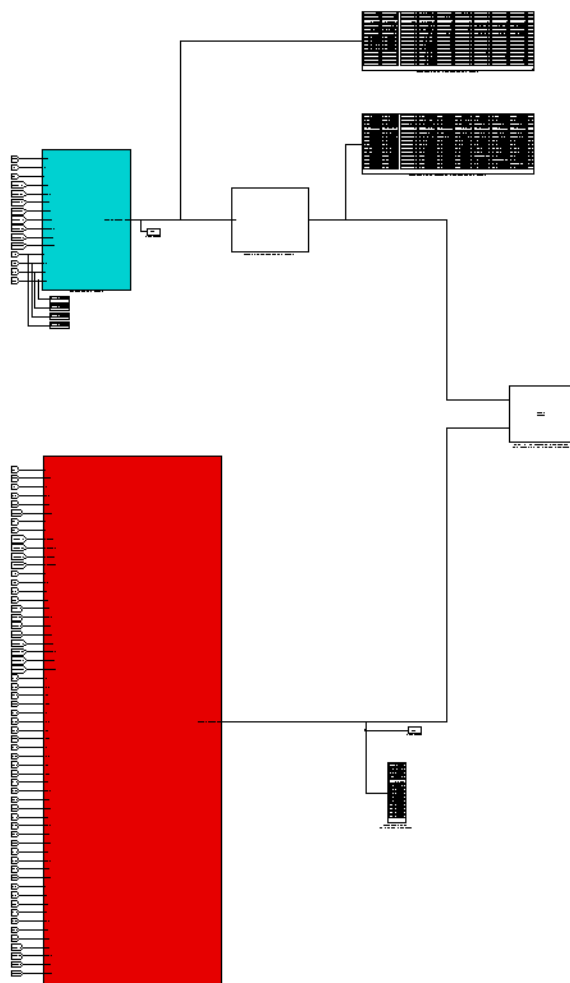


Fig 0.31 – Cuore del modello di monoposto con inerzia delle ruote

Sia per la matrice, che per il vettore il criterio è stato quello di usare blocchetti di tipo Embedded MATLAB Function, all'interno dei quali, le funzioni che originano le singole componenti vengono costruite attraverso vere e proprie espressioni analitiche.

0.2.1.1 La matrice dei coefficienti

Come detto la matrice in questo caso assume una struttura differente rispetto al precedente modello per motivi di gestibilità.

L'esplorazione infatti mostra il blocco della funzione Embedded MATLAB, all'interno della quale è riportata l'espressione integrale della matrice, convertita dal linguaggio Mathematica, a linguaggio Matlab.

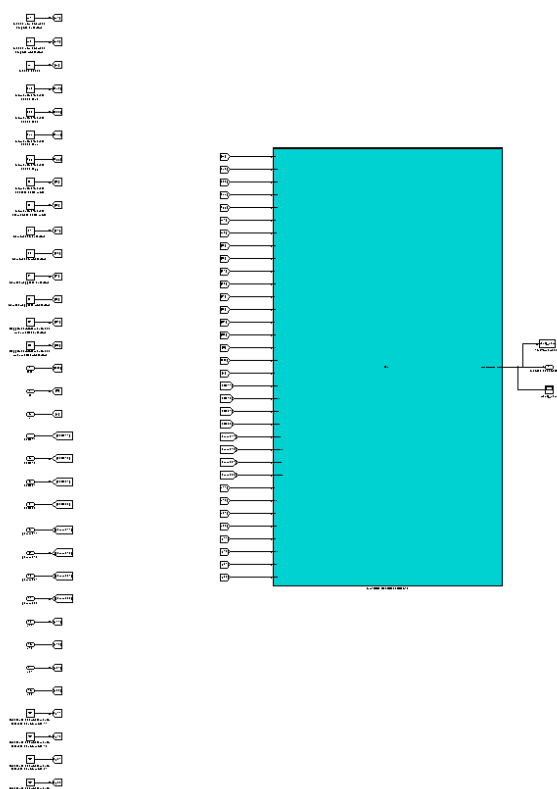


Fig 0.32 – Funzione Embedded MATLAB per la matrice dei coefficienti

```

1 function Matrice_dei_coefficienti = fcn(m,Icx2,Icz2,Icxx,Icyy,m1,m2,Ia,Id,a1,a2,t1,t2,R1,R2,fi,teta,h,de
2 % This block supports the Embedded MATLAB subset
3 % See the help menu for details
4
5 - Matrice_dei_coefficienti = [m+2*m1+2*m2,0,0,(-2)*fi*h*m1+(-2)*fi*h*m2+2*fi*m1*R1+2*fi*m2*R2,0,(-2)*h*m1+

```

Fig 0.33 – Linguaggio della funzione Embedded MATLAB per la matrice dei coefficienti

0.2.1.2 Il vettore degli ingressi

Analoghe considerazioni valgono per il vettore. Esplorandolo si trovano al suo interno le curve elastiche e smorzanti delle sospensioni e barre di torsione prima, mentre dopo la funzione Embedded.

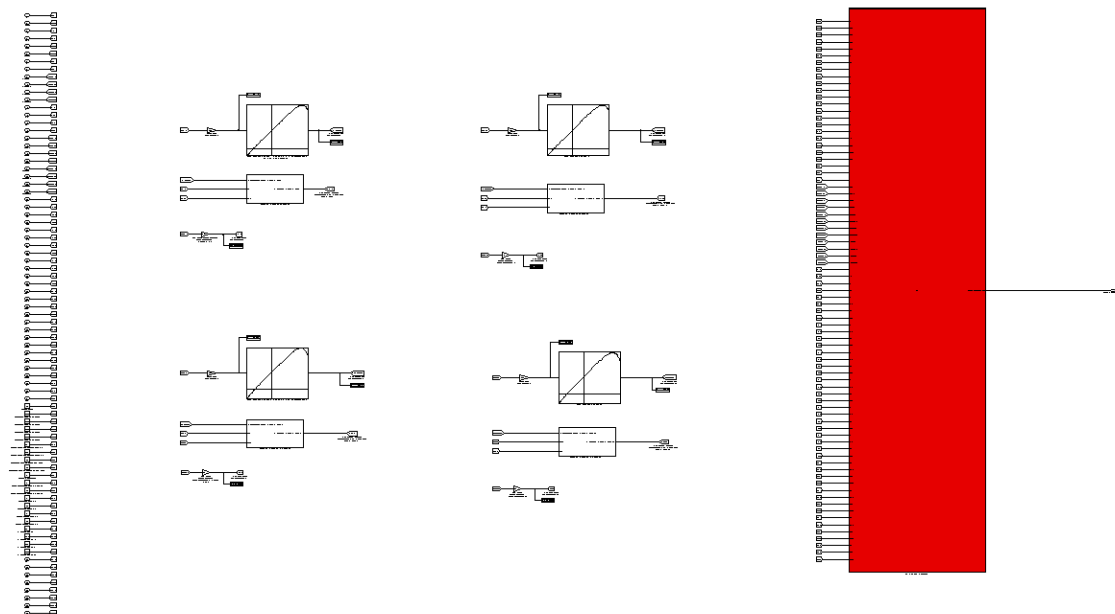


Fig 0.34 – Struttura del vettore degli ingressi

```

Embedded MATLAB Editor - Block: Modello_con_inerzia_ruote/CREATORE DELLE COMPONENTI DEL VETTORE DEGLI INGRESSI/VETTORE DEGLI INGRESSI
File Edit Text Debug Tools Window Help
1 function Vettore_degli_ingressi = fcn(m,Icxz,Iczz,Icxx,Icyy,m1,m2,g,Ia,Id,a1,a2,t1,t2,R1,R2,fi,dfi,teta
2 % This block supports the Embedded MATLAB subset
3 % See the help menu for details
4
5 - Vettore_degli_ingressi = [Fx11+Fx12+Fx21+Fx22+(-1)*delta11*Fy11+(-1)*delta12*Fy12+(-1)*delta21*Fy21+(-1)
6
Ready Ln 6 Col 1

```

Fig 0.35 – Linguaggio della funzione Embedded MATLAB per il vettore degli ingressi

0.2.2 Le linee di integrazione e la visualizzazione delle grandezze

A livello concettuale non c'è nessuna differenza con il precedente modello. Quello che cambia è il numero di linee di integrazione e l'assenza di blocchi di tipo MEMORY.

Questo ultimo aspetto è conseguenza diretta del fatto che il vettore delle incognite è composto da termini con ordine di derivazione almeno pari ad uno.

Di conseguenza tutte le componenti del vettore devono essere integrate per poter chiudere l'anello. Il risultato è quindi l'assenza di loop algebrici.

L'adozione dei colori nello schema è in perfetta analogia a prima. I blocchi color magenta inglobano gli integratori, mentre quelli color giallo sono i blocchi di visualizzazione. Per il resto non ci sono cose da aggiungere rispetto al precedente modello, se non il fatto di avere un numero iniziale di linee maggiore.

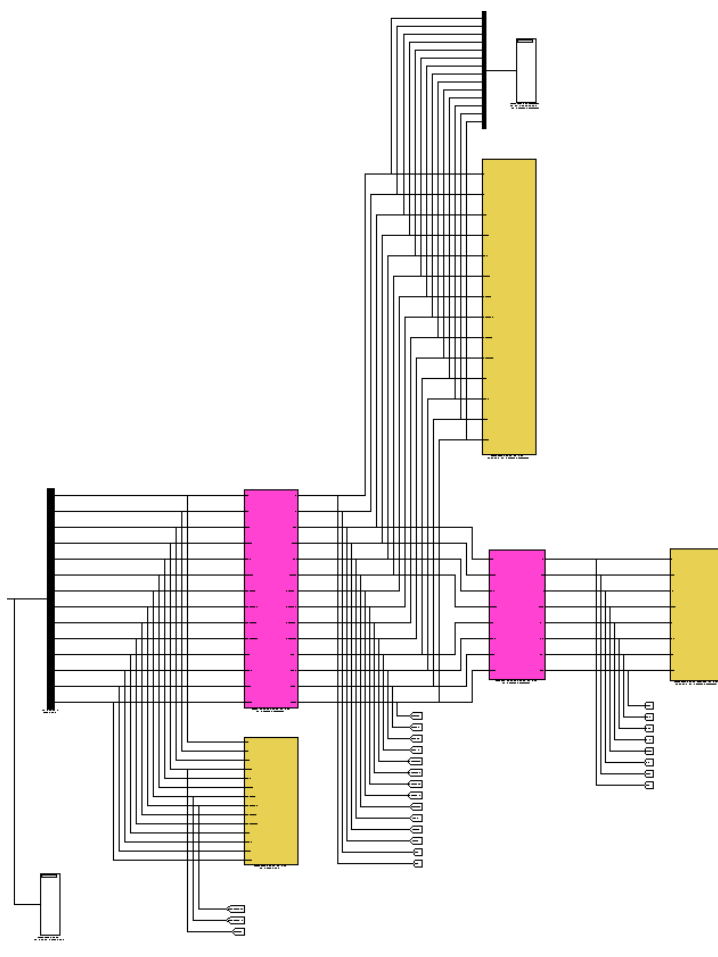


Fig 0.36 – Vista complessiva delle linee, dei blocchi di integrazione, e dei blocchi di visualizzazione

0.2.3 La sezione dei comandi pilota e la cinematica di sterzo e sospensioni

L'unica sezione a non cambiare per nulla è ovviamente quella degli ingressi pilota e della cinematica delle sospensioni. La cinematica infatti del sistema di sterzo e delle sospensioni non è minimamente influenzata dall'inerzia delle ruote e dalla comprimibilità radiale dei pneumatici.

0.2.4 Escursioni e velocità di escursione dei centri ruota

Le differenze rispetto al precedente modello sono attribuibili solo alla presenza delle compressioni radiali dei pneumatici e alle rispettive velocità.

Anche in questo caso le espressioni analitiche sono semplici.

$$zC_{11} = (R_1 - h_{11}) - (h + t_1 \Phi) + a_1 \theta \quad zC_{12} = (R_1 - h_{12}) - (h - t_1 \Phi) + a_1 \theta$$

$$zC_{21} = (R_2 - h_{21}) - (h + t_2 \Phi) - a_2 \theta \quad zC_{22} = (R_2 - h_{22}) - (h - t_2 \Phi) - a_2 \theta$$

Quelle invece relative alle velocità, ottenute come detto per derivazione delle precedenti sono invece:

$$\dot{z}C_{11} = -\dot{h}_{11} - (\dot{h} + t_1 \dot{\Phi}) + a_1 \dot{\theta} \quad \dot{z}C_{12} = -\dot{h}_{12} - (\dot{h} - t_1 \dot{\Phi}) + a_1 \dot{\theta}$$

$$\dot{z}C_{21} = -\dot{h}_{21} - (\dot{h} + t_2 \dot{\Phi}) - a_2 \dot{\theta} \quad \dot{z}C_{22} = -\dot{h}_{22} - (\dot{h} - t_2 \dot{\Phi}) - a_2 \dot{\theta}$$

I blocchi che calcolano queste grandezze sono di colore blu, disposti alla sinistra del vettore degli ingressi. La loro struttura è analoga a quella del precedente modello. Esplorandoli si trova per entrambi un totale di 4 sottosistemi, ognuno dei quali si occupa della velocità o della posizione di un ben preciso centro ruota.

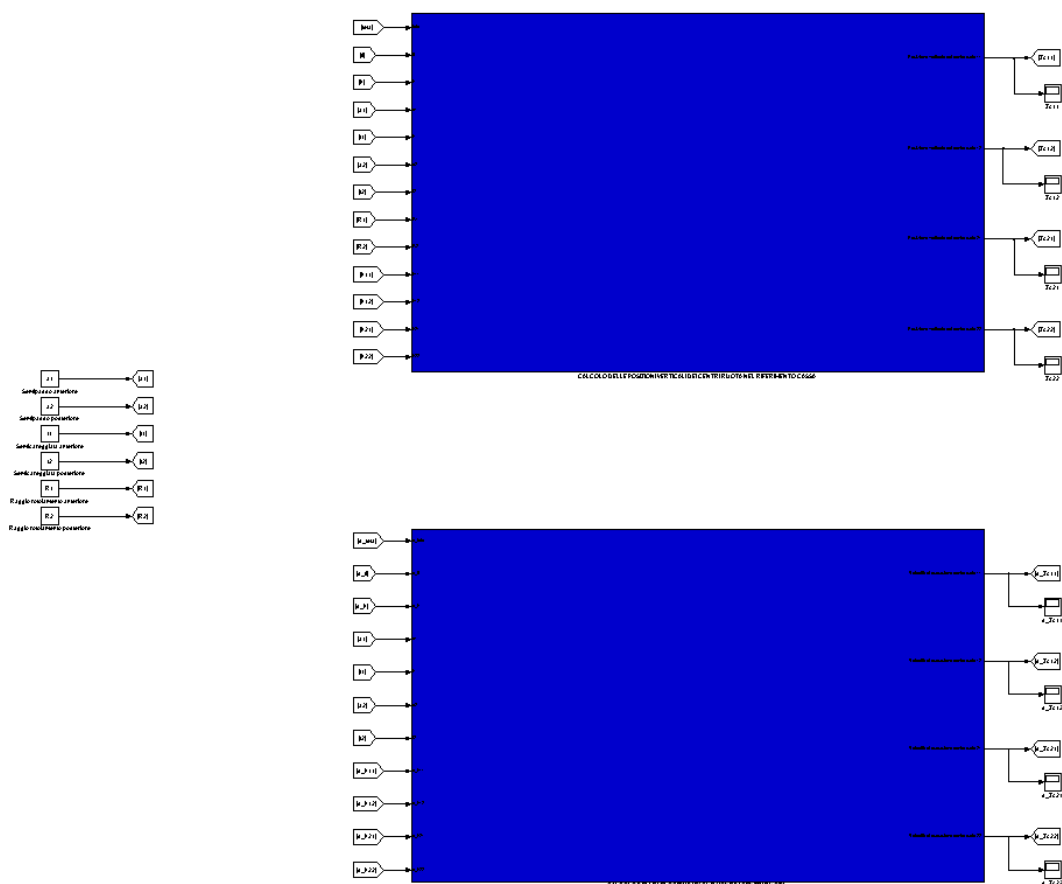


Fig 0.37 – Vista complessiva delle linee, dei blocchi di integrazione, e dei blocchi di visualizzazione

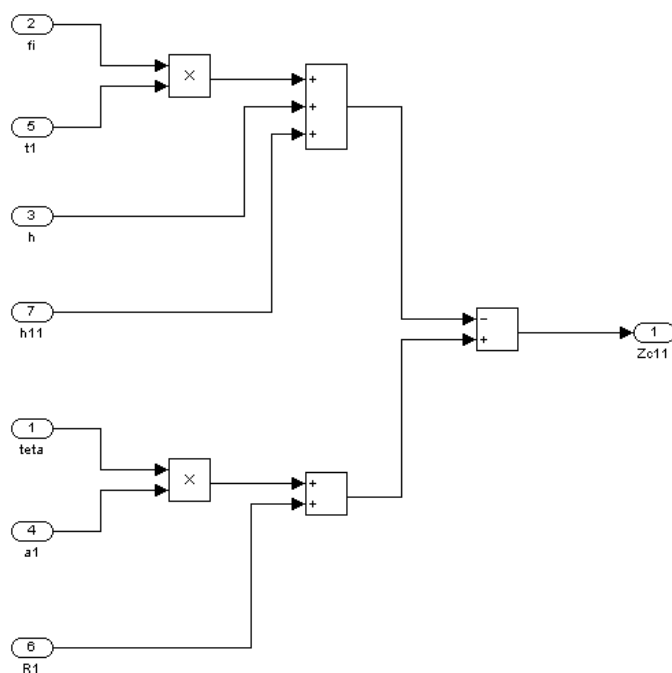


Fig 0.38 – Esempio di calcolo della posizione del centro ruota 11

0.2.5 Forze verticali a terra

Contrariamente allo schema di monoposto senza inerzia ruote, le forze verticali sono uscite indirette della risoluzione del sistema matriciale.

Proprio per questo è presente un blocco opportunamente adibito al calcolo delle forze verticali agenti sui pneumatici.

Di colore verde chiaro, in ingresso preleva i segnali di compressione e di velocità di compressione dei pneumatici. Successivamente, attraverso le equazioni costitutive degli stessi implementate al suo interno, fornisce in uscita il valore delle forze verticali attribuibili alle sole compressioni, quello attribuibili alle sole velocità di compressione ed infine la loro somma, nonché l'effettivo valore di forza verticale a terra.

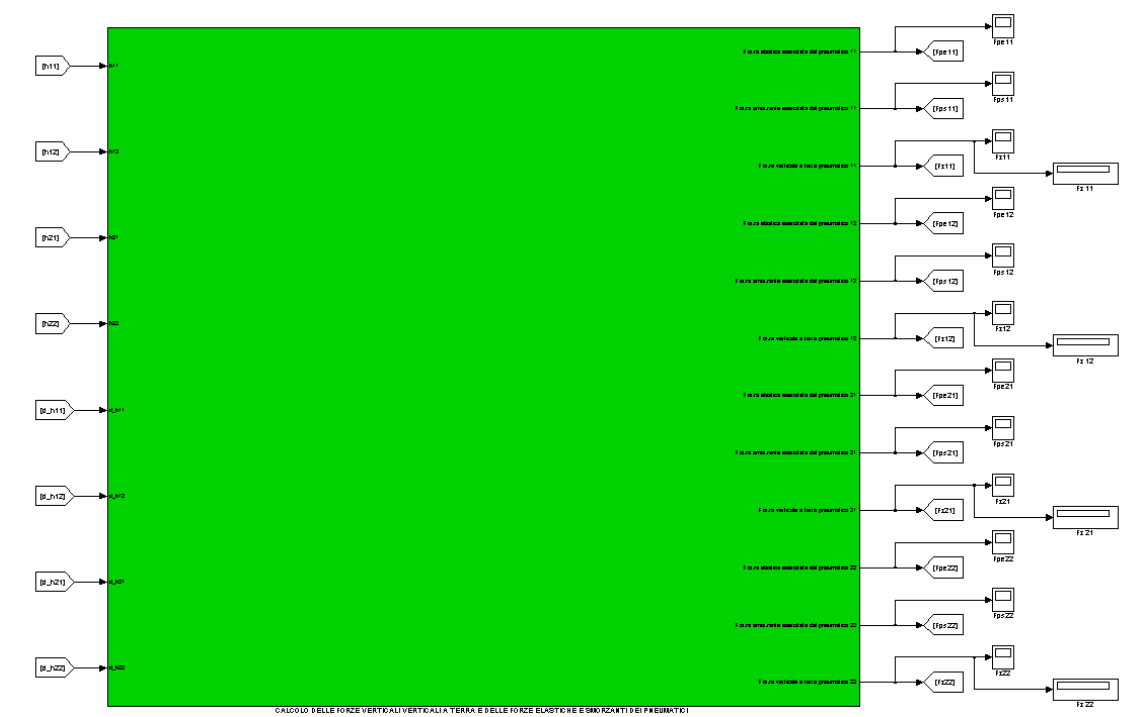


Fig 0.39 – Blocco per il calcolo delle forze verticali e dei rispettivi contributi

Al suo interno sono localizzati 4 sottosistemi, uno per ruota, all'interno dei quali si trova un algoritmo molto semplice per il calcolo dei due contributi di forza.

Se ne riporta quello relativo alla ruota 11 (anteriore sinistra).

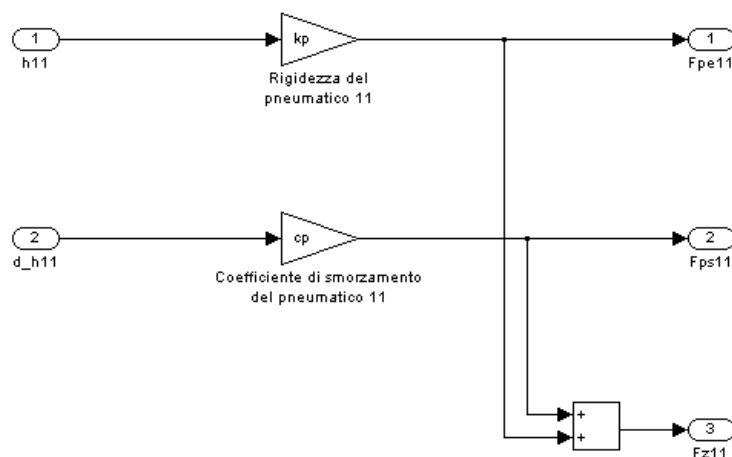


Fig 0.40 – Calcolo della forza verticale 11 e dei singoli contributi

0.2.6 Assetto dei pneumatici

Il secondo blocco che non subisce alcuna modifica rispetto al modello di monoposto senza inerzia delle ruote, è quello relativo all'assetto dei pneumatici. La comprimibilità radiale dei pneumatici infatti, non influenza le relazioni che definiscono tali angoli. Di conseguenza, tutta la sezione di modello dedicata a questo aspetto rimane invariata.

0.2.7 Calcolo degli scorrimenti longitudinali

Gli scorrimenti vengono calcolati dai 4 blocchetti di colore giallo, secondo la usuale definizione di scorrimento longitudinale.

Al loro interno quindi sono disponibili i segnali di velocità angolare effettiva e teorica. La loro differenza, rapportata al valore della velocità teorica, definisce quindi lo scorrimento longitudinale, che risulterà positivo per una ruota in trazione e negativo per una in frenatura.

In figura è rappresentato il blocco relativo al pneumatico 11 è la funzione che si trova al suo interno.

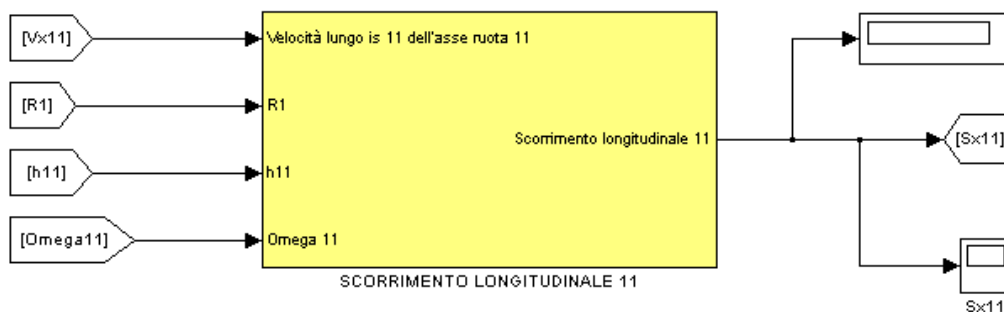


Fig 0.41 – Blocco per il calcolo dello scorrimento longitudinale della ruota 11

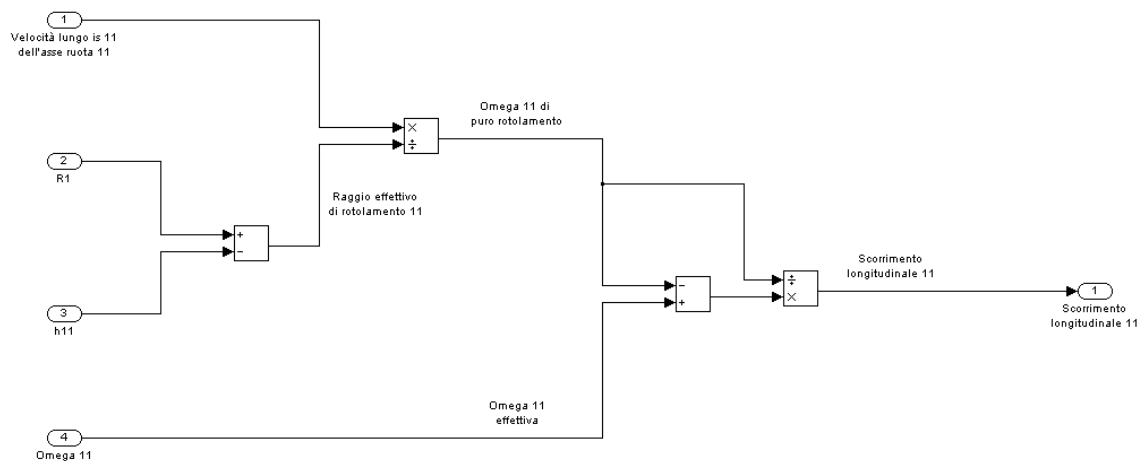


Fig 0.42 – Calcolo dello scorrimento longitudinale della ruota 11

0.2.8 Calcolo della coppia al volante

Analogamente al precedente modello, anche adesso è presente un blocco che effettua in parallelo il calcolo della coppia che il pilota deve applicare al volante per effettuare la manovra in esame.

La metodologia di costruzione è ovviamente la stessa, la differenza è nell'espressione al suo interno, che questa volta presenta termini inerziali direttamente legati alla presenza delle ruote.



Fig 0.43 – Blocco di calcolo della coppia al volante

Bibliografia

[1] Massimo Guiggiani (2005), “Dinamica del veicolo”, CittàStudiEdizioni-Torino.